

19. ДЕВЯТНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ, 21 ФЕВРАЛЯ 2023 Г.

19.1. Коммутант. В прошлый раз мы сформулировали следующую теорему.

Теорема 19.1. *Всякая подгруппа $H \subset G$, содержащая G' , нормальна. При этом факторгруппа G/H абелева (в частности, G/G' тоже абелева). Обратно, если H — такая нормальная подгруппа в G , что G/H абелева, то G' содержится в H . Другими словами, G' — наименьшая нормальная подгруппа в G , факторгруппа по которой абелева.*

Доказательство. Пусть $H \supset G'$. Пусть $h \in H$, $g \in G$. Тогда

$$ghg^{-1} = ghg^{-1}h^{-1} = (g, h) \cdot h \in G' \cdot H \subset H,$$

поэтому $H \triangleleft G$.

Далее, пусть H — нормальная подгруппа в G , и $g_1, g_2 \in G$. Докажем, что g_1H и g_2H коммутируют, т.е. G/H коммутативна, тогда и только тогда, когда $G' \subset H$.

$$(g_1H, g_2H) = g_1Hg_2Hg_1^{-1}Hg_2^{-1}H = g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1}H = (g_1, g_2)H.$$

Если факторгруппа G/H абелева, то $(g_1, g_2)H = eH$, т.е. $(g_1, g_2) \in H$. Обратно, если $(g_1, g_2) \in H$, то из приведенного равенства получаем, что элементы факторгруппы g_1H и g_2H коммутируют. Теорема доказана. $\square$

19.2. Коммутанты некоторых групп. Из задач семинаров нам известно следующее

Предложение 19.2. *Группа чётных перестановок A_n порождается тройными циклами (ijk) . При $n \geq 5$ группа A_n порождается парами независимых транспозиций $(ij)(kl)$.*

Пример 19.3. $S'_n = A_n$ при $n \geq 3$. Действительно, $S'_n \subset A_n$, т.к. группа $S_3/A_3 = \mathbb{Z}_2$ абелева. Далее, найдём S'_3 . Эта группа содержится в A_3 . Но в A_3 нет никакой меньшей подгруппы, кроме единичной, поэтому S'_3 совпадает со всей A_3 (он отличен от $\{e\}$, т.к. S_3 некоммутативна). A_3 содержит оба 3-цикла (123) и (132) . Поэтому S'_n содержит всевозможные 3-циклы. Поэтому из предложения 19.2 следует, что $S'_n = A_n$.

Используем это предложение для нахождения коммутантов групп S_n и A_n .

Пример 19.4. $A'_4 = V_4$, где $V_4 = \langle (ij)(kl) \rangle$ — четверная группа Клейна. Действительно, $A_4/V_4 \cong \mathbb{Z}_3$ абелева, т.е. $A'_4 \subset V_4$. Но V_4 не содержит никаких нетривиальных подгрупп, нормальных в A_4 (и вообще V_4 — единственная нормальная подгруппа в A_4 , отличная от единичной и её самой), поэтому $A'_4 = V_4$.

Пример 19.5. Предыдущий пример показывает, что при $n \geq 5$ коммутант A'_n содержит все пары независимых транспозиций. Поэтому он совпадает со всей группой A_n .

Замечание 19.6. На прошлом семинаре было показано, что при $n \geq 5$ группа A_n проста, т.е. не содержит нетривиальных нормальных подгрупп. Разумеется, для всякой неабелевой простой группы G верно, что $G' = G$.

Вычислим² коммутанты групп $GL_n(K)$ и $SL_n(K)$. Для этого нам понадобится следующее утверждение.

²На лекции этого не было, зато было на семинарах.

Предложение 19.7. Группа $\mathrm{SL}_n(K)$ порождается трансвекциями $E + cE_{ij}$ при $i \neq j$, т.е. матрицами элементарных преобразований первого рода (здесь E — единичная матрица, E_{ij} — матричная единица, т.е. матрица, все элементы которой равны нулю, кроме (i, j) -го, который равен 1).

Задача 19.1. Докажите предложение 19.7.

Докажем, что $\mathrm{GL}_n(K)' = \mathrm{SL}_n(K)' = \mathrm{SL}_n(K)$, в предположении, что поле K содержит более трёх элементов. Во-первых, $\mathrm{GL}_n(K)/\mathrm{SL}_n(K)$ есть группа скалярных матриц, которая является абелевой, т.е. $\mathrm{GL}_n(K)' \subset \mathrm{SL}_n(K)$. Далее, можно проверить явно, что

$$\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & (\lambda^2 - 1)c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому если в K найдётся элемент λ , отличный от 0 и ± 1 , то группа $\mathrm{GL}_n(K)'$ будет содержать все трансвекции. Поэтому она совпадает с $\mathrm{SL}_n(K)$ в силу предыдущего предложения.

19.3. Разрешимые группы. Определим *высшие коммутанты* $G^{(i)}$ группы G по следующему правилу: $G^{(1)} = G'$, $G^{(i)} = (G^{(i-1)})'$. Получим ряд подгрупп, каждая из которых нормальна в предыдущей:

$$G = G^{(0)} \triangleright G^{(1)} \triangleright \dots \triangleright G^{(k)} \triangleright \dots$$

Определение 19.8. Группа G *разрешима*, если $G^{(k)} = \{e\}$ для некоторого k .

Пример 19.9. В предыдущем пункте мы видели, что S_4 разрешима (для неё $S_4^{(3)} = \{e\}$, т.к. $S_4^{(2)} = V_4$ абелева), а при $n \geq 5$ группа S_n уже не является разрешимой.

Справедлива следующая несложная

Теорема 19.10. Пусть $H \triangleleft G$ — нормальная подгруппа. Группа G разрешима тогда и только тогда, когда H и G/H разрешимы.

Задача 19.2. Докажите эту теорему.

19.4. Простые группы.

Определение 19.11. Группа G называется *простой*, если она не содержит никаких нормальных подгрупп, отличных от G и единичной.

Замечание 19.12. Всякая простая неабелева группа будет неразрешимой. Действительно, G' нормальна в G , и при этом она неединична (т.к. G неабелева). Но в G нет других нормальных подгрупп, кроме G и $\{e\}$, значит, $G' = G$.

Пример 19.13. Выясним, какие абелевы группы будут простыми. Условие простоты при этом будет эквивалентно условию отсутствия нетривиальных подгрупп (т.к. всякая подгруппа в абелевой группе нормальна). Ясно, что в каждой группе есть подгруппа, изоморфная $\mathbb{Z}$ или $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ — такая подгруппа будет порождена любым неединичным элементом. В $\mathbb{Z}$ при этом есть нетривиальные подгруппы, а в $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ их нет тогда и только тогда, когда n простое. Следовательно, все простые абелевы группы имеют вид $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ при простом p .

Теорема 19.14. Группа A_5 проста.

Доказательство. Для доказательства этой теоремы опишем классы сопряженности в A_5 . Для этого сначала опишем классы сопряженности в S_5 . Их будет семь: столько же, сколько цикловых типов, т.е. разбиений числа 5. Запишем их в виде таблицы.

элемент	количество	знак
e	1	+
(12)	10	—
(123)	20	+
(1234)	30	—
(12345)	24	+
$(12)(345)$	20	—
$(12)(34)$	15	+

Далее воспользуемся тем фактом, что каждый класс сопряженности четных перестановок в S_n распадается на два класса в A_n тогда и только тогда, когда количество входящих в него циклов каждой нечетной длины нечетно — причем эти классы будут иметь одинаковую мощность. Соответственно, распадется на два только класс перестановки (12345) . Запишем такую же таблицу для A_5 :

элемент	количество
e	1
(123)	20
(12345)	12
(12354)	12
$(12)(34)$	15

Теперь предположим, что в A_5 нашлась нормальная подгруппа N . Каждый класс сопряженности либо лежит в ней, либо не пересекается с ней вовсе — при этом единица обязана в ней лежать. Мы получаем следующее уравнение на число элементов в N :

$$|N| = 1 + 20a + 12b + 12c + 15d,$$

где $a, b, c, d \in \{0, 1\}$, причем они равны нулю, если соответствующий класс не лежит в N , и единице, если лежит. Далее, порядок подгруппы должен делить порядок группы, поэтому

$$|N| \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}.$$

Несложный перебор показывает, что такое бывает либо при $|N| = 1$ и $a = b = c = d = 0$, либо при $|N| = 60$, когда все переменные равны 1. Поэтому нетривиальных нормальных подгрупп в A_5 нет, т.е. A_5 проста. $\square$

Имеет место следующий, более общий, факт, который мы здесь доказывать не будем. Желающие могут посмотреть доказательство, например, в учебнике Винберга, глава 10, § 5.

Теорема 19.15. *Группа A_n проста при $n \geq 5$.*

Классификация конечных простых групп была завершена в 1981 году (и с тех пор в ней обнаруживались и исправлялись ошибки). Она очень сложна, полностью она занимает несколько тысяч страниц. Интерес к простым группам определяется тем, что они служат «кирпичиками» для построения произвольных групп. А именно, верна следующая теорема, которую мы также приведем без доказательства.

Теорема 19.16 (Жордан–Гёльдер). *Для каждой конечной группы G существует последовательность подгрупп (называемая композиционным рядом группы), каждая из которых нормальна в предыдущей:*

$$G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright G_2 \cdots \triangleright G_m = \{e\},$$

причем все факторы G_i/G_{i+1} просты. Набор факторгрупп при этом определен однозначно с точностью до перестановки.

Особенно просто при этом получается описание разрешимых групп.