

Формула Бернсайда

Задача 17.1. Найдите число разных раскрасок граней куба в:

- а) три цвета; б) n цветов.

Раскраски считаются одинаковыми, если их можно совместить, повернув в руках.

Задача 17.2. Имеются одинаковые по форме бусины, раскрашенные в n попарно разных цветов (запас бусин каждого из цветов неограничен). Сколько различных на вид ожерелий можно изготовить из:

- а) 3; б) 4; в) 7; г) 8; д) 9; е*) k бусин?

Ожерелья можно совмещать поворотом, но не переворачивать.

Нормальные подгруппы

Задача 17.3. Найдите все нормальные подгруппы в группах: а) S_3 ; б) A_4 ; в) S_4 , и опишите соответствующие факторгруппы.

Задача 17.4. Пусть даны три вложенные друг в друга группы $K \subset H \subset G$, причем $K \triangleleft H$ и $H \triangleleft G$. Обязательно ли $K \triangleleft G$?

Задача 17.5 (Kleinsche Vierergruppe). Постройте гомоморфизм $S_4 \rightarrow S_3$ и опишите его ядро. Оно обозначается V_4 и называется *четверной группой Клейна*.

УКАЗАНИЕ. Может оказаться полезным рассмотреть S_4 как группу вращений куба. Придумайте ее действие на множестве из трех элементов.

Задача 17.6. Докажите, что всякая подгруппа индекса 2 нормальна.

Задача 17.7. а) Пусть $H \subset G$ — подгруппа индекса 2, $C \subset G$ — класс сопряженных элементов в G , и пусть $C \subset H$. Докажите, что либо C является классом сопряженности в H , либо C распадается на два класса сопряженности в H , состоящих из одинакового числа элементов.

б) Опишите классы сопряженности в группе A_n .

Задача 17.8. Сопоставим отображению $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ дробно-линейное преобразование $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$. Докажите, что это отображение является гомоморфизмом, и найдите его ядро.