

16. ШЕСТНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ, 26 ЯНВАРЯ 2023 Г.

16.1. Сопряженность стабилизаторов точек одной орбиты. Рассмотрим модельный пример: пусть группа S_n действует на множестве $\{1, \dots, n\}$. Это действие транзитивно: любые два элемента можно перевести друг в друга (например, подходящей транспозицией). Стабилизатор элемента i — это множество перестановок σ , удовлетворяющих условию $\sigma(i) = i$. Ясно, что это подгруппа, которую можно отождествить с перестановками множества из $n - 1$ элемента, т.е. S_{n-1} . В частности, стабилизаторы различных элементов «устроены одинаково» (т.е. *изоморфны*; точное значение этого термина появится в следующей лекции). Более точно можно сказать, что эти подгруппы переводятся друг в друга *сопряжением*. Оказывается, это свойство выполнено всегда: стабилизаторы элементов одной орбиты сопряжены.

Теорема 16.1. Пусть группа G действует на множестве X , и x, y — элементы одной орбиты, причем $y = gx$. Тогда

$$\text{Stab } y = g(\text{Stab } x)g^{-1}.$$

Доказательство. Рассмотрим какой-нибудь элемент $h \in \text{Stab } x$. Это значит, что $hx = x$. Поскольку $y = gx$, то элемент y переводится в элемент x действием обратного к g элемента группы: $x = g^{-1}y$. Подставим это в предыдущее равенство:

$$h(g^{-1}y) = g^{-1}y,$$

что равносильно тому, что

$$ghg^{-1}y = y.$$

Стало быть, элемент ghg^{-1} принадлежит стабилизатору элемента y тогда и только тогда, когда $h \in \text{Stab } x$, что и требовалось. $\square$

Отсюда получается такое следствие.

Следствие 16.2. В обозначениях предыдущей теоремы, $|\text{Stab } y| = |\text{Stab } x|$ (т.е. эти две подгруппы либо состоят из одинакового конечного числа элементов, либо обе бесконечны).

16.2. Точки орбиты как смежные классы по стабилизатору. Рассмотрим действие $G \curvearrowright X$. Пусть $x \in X$ — некоторый элемент, и Gx — его орбита.

Теорема 16.3. Имеется биекция между точками орбиты Gx и левыми смежными классами $G/\text{Stab } x$ по стабилизатору элемента x . При этой биекции элементу $y = gx \in Gx$ отвечает смежный класс $g\text{Stab } x \in G/\text{Stab } x$.

Доказательство. Рассмотрим два элемента $g_1, g_2 \in G$, переводящие x в один и тот же элемент $y = g_1x = g_2x$. В этом случае $x = g_1^{-1}g_2x$, то есть $g_1^{-1}g_2 \in \text{Stab } x$. Но это и значит, что $g_1 \equiv g_2 \pmod{\text{Stab } x}$. Все эти переходы являются равносильными, откуда и получается искомая биекция. $\square$

Из этой теоремы получается ключевой результат, относящийся к конечным группам:

Теорема 16.4. Пусть конечная группа G действует на множестве X . Тогда для любого элемента $x \in X$ верно, что

$$|G| = |Gx| \cdot |\text{Stab } x|.$$

Доказательство. Действительно, количество элементов орбиты (кстати, оно называется *длиной орбиты*) равно числу смежных классов $G/\text{Stab } x$. Утверждение теоремы получается применением к группе G и ее подгруппе $\text{Stab } x$ теоремы Лагранжа. $\square$

Следствие 16.5. *Длина орбиты и порядок стабилизатора делят порядок группы.*

16.3. Формула Бернсайда. Непосредственное описание орбит действия конечной группы на конечном множестве может быть непросто. Например, рассмотрим следующую задачу.

Задача 16.1. Найдите количество раскрасок граней куба в 3 цвета. Две раскраски считаются одинаковыми, если их можно совместить поворотом.

Лобовое решение этой задачи даже для двух цветов уже требует некоторого перебора. Оказывается, что ответ на этот и подобные вопросы может дать *формула Бернсайда*¹.

Введем следующее обозначение. Пусть, как и ранее, группа G действует на множестве X ; зафиксируем некоторый элемент $g \in G$. Обозначим через X^g множество элементов из X , неподвижных относительно g :

$$X^g = \{x \in X \mid gx = x\}.$$

Теорема 16.6 (формула Бернсайда). *Пусть группа G и множество X конечны. Тогда число орбит $|X/G|$ равно среднему арифметическому мощностей множеств $|X^g|$:*

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|.$$

Доказательство. Рассмотрим множество пар $(g, x) \in G \times X$, для которых верно, что $gx = x$. Найдём их общее число двумя способами. С одной стороны, оно равно

$$\sum_{g \in G} |X^g|.$$

С другой стороны, можно просуммировать не по элементам группы G , а по элементам множества X : мы получим, что эта же величина равна

$$\sum_{x \in X} |\text{Stab } x|.$$

Разобьём эту сумму на части, отвечающие различным орбитам, и воспользуемся тем, что для точек одной орбиты стабилизаторы имеют одну и ту же мощность.

$$\sum_{x \in X} |\text{Stab } x| = \sum_{A \in X/G} \sum_{x \in A} |\text{Stab } x| = \sum_{A = Gx \in X/G} |Gx| \cdot |\text{Stab } x| = \sum_{A \in X/G} |G|.$$

Здесь через A обозначается орбита группы G . В последнем переходе мы воспользовались теоремой 16.4. Но в итоге у нас получилась сумма из $|X/G|$ слагаемых, равных $|G|$. То есть она равна $|X/G| \cdot |G|$. Сопоставляя ее с первым выражением для той же величины, получаем искомую формулу. $\square$

Решим задачу 16.1. Всего имеются 24 вращения куба. Выпишем в таблицу, сколько бывает каких вращений и сколько относительно каждого вращения неподвижных раскрасок. Например, относительно тождественного преобразования $e \in G$ все раскраски будут неподвижны, т.е. их число будет равно 3^6 (каждую из шести граней куба можно окрасить в три цвета). А для поворота на 90 градусов относительно вертикальной оси (мы считаем, что грани куба параллельны координатным плоскостям в $\mathbb{R}^3$) есть только 3^3 неподвижных раскрасок: для них четыре боковых грани

¹Также иногда именуемая *формулой не-Бернсайда*; Бернсайд в одной своей работе лишь использовал этот хорошо известный до него факт. Это одна из многочисленных иллюстраций знаменитого *принципа Арнольда*.

должны иметь одинаковый цвет, ведь поворот переводит такую раскраску в себя; цвета верхней и нижней грани могут быть произвольными.

элемент	количество	число раскрасок
тождественный	1	3^6
поворот на $\pm 90^\circ$ относительно координатной оси	6	3^3
поворот на 180° относительно координатной оси	3	3^4
поворот на 180° относительно прямой, проходящей через середины противоположных ребер	6	3^3
поворот на $\pm 120^\circ$ относительно главной диагонали куба	8	3^2

Усредним полученные в таблице значения и получим ответ:

$$|X/G| = \frac{1}{24}(3^6 + 6 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^4 + 6 \cdot 3^3 + 8 \cdot 3^2) = 57.$$

Самое удивительное, что разделилось нацело. Если не разделится — ищите ошибку.