

Группы

Задача 15.1. Найдите смежные классы:

- а) $\mathbb{Z}$ по $m\mathbb{Z}$, где $m > 0$ — целое число;
- б) $\mathbb{C}$ по $\mathbb{Z}[i]$;
- в) группы перестановок S_n по группе перестановок, сохраняющих элемент n .

Задача 15.2. Докажите, что группа перестановок S_n порождается элементами:

- а) транспозициями (i, j) , где $i < j$;
- б) простыми транспозициями $(i, i + 1)$;
- в) транспозицией $(1, 2)$ и длинным циклом $(1, 2, \dots, n)$;
- г) опишите классы сопряженности в S_n .

Задача 15.3. Докажите, что группа четных перестановок A_n порождается элементами:

- а) тройными циклами (i, j, k) при $n \geq 3$;
- б) произведениями независимых транспозиций $(i, j)(k, l)$ при $n \geq 5$;
- в) порождается ли A_4 произведениями независимых транспозиций?
- г*) опишите классы сопряженности в A_n .

Задача 15.4. Пусть D_n — группа симметрий правильного n -угольника на плоскости.

- а) Сколько в ней элементов? Каков порядок каждого из них?
- б) Опишите классы сопряженности в D_n .
- в) Найдите какие-нибудь два элемента, которые порождают D_n .
- г) Можно ли породить D_n одним элементом?

Задача 15.5. а) Докажите, что группа вращений тетраэдра изоморфна A_4 .

б) Докажите, что группа симметрий тетраэдра изоморфна S_4 .

в) Докажите, что группа вращений куба изоморфна S_4 .

УКАЗАНИЕ. Какие 4 элемента куба она переставляет?

г) А что можно сказать про группу симметрий куба?

Задача 15.6*. Докажите, что группа вращений додекаэдра изоморфна A_5 .

УКАЗАНИЕ. Впишите в додекаэдр 5 кубов.