

Группы, циклические и не только

Задача 14.1. Докажите, что во всякой группе:

- а) пересечение любого набора подгрупп является подгруппой;
- б) объединение двух подгрупп является подгруппой тогда и только тогда, когда одна из двух подгрупп содержится в другой;
- в) если подгруппа C содержится в объединении подгрупп $A \cup B$, то либо $C \subseteq A$, либо $C \subseteq B$.

Задача 14.2. Докажите, что если подмножество $H \subset G$, $e \in H$, в конечной группе G таково, что для всяких $x \in H$, $y \in H$ верно, что $xy \in H$, то и для любого $x \in H$ верно, что $x^{-1} \in H$. Верно ли это в бесконечной группе?

Задача 14.3. Найдите порядок элемента группы:

- а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \in S_5$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} \in S_6$; в) $\frac{1-i}{\sqrt{2}} \in \mathbb{C}^*$;
- г) $\begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$; д) $\begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$; е) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$.

Задача 14.4. Докажите, что во всякой группе:

- а) элементы x и xyx^{-1} имеют одинаковый порядок;
- б) элементы xy и yx имеют одинаковый порядок;
- в) элементы xyz и zyx могут иметь различный порядок.

Задача 14.5. Пусть элементы x и y группы G имеют конечный порядок и $xy = yx$.

- а) Докажите, что если $\text{ord } x$ и $\text{ord } y$ взаимно просты, то $\text{ord } xy$ равен НОК этих порядков;
- б) Докажите, что существуют такие k и m , что порядок элемента $x^k y^m$ равен НОК порядков элементов x и y ;
- в*) Верно ли это для некоммутирующих элементов?

Задача 14.6. Найдите число элементов порядка p^k в циклической группе порядка p^m для $0 < k \leq m$. Число p — простое.

Задача 14.7. Найдите число элементов каждого из порядков в циклической группе порядка:

- а) 23; б) 25; в) 24; г) 100; д) p^n .

Задача 14.8. Найдите все подгруппы в каждой из этих групп.

Задача 14.9. Существует ли бесконечная группа, все элементы которой имеют конечный порядок?