

Уравнения третьей и четвертой степени

▷ Напомним формулу Кардано для решения уравнения $x^3 + px + q = 0$:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}},$$

если $\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} \geq 0$.

Задача 23.1. Докажите что если кубическое уравнение с действительными коэффициентами $x^3 + px + q = 0$ имеет двойной, но не тройной корень, то формула Кардано дает другой (не двойной) корень, и он равен $\sqrt[3]{-4q}$.

Задача 23.2. а) Напомним, что формула для синуса тройного угла имеет вид $\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$. Используя эту формулу, решите уравнение $x^3 - \frac{3}{4}x + q = 0$, где $q \in [-1/4, 1/4]$ (решение должно выражаться через тригонометрические функции и обратные к ним).

б) Обобщите этот метод для решения уравнений при значениях p , не равных $-3/4$. При каких значениях q работает этот метод? Сколько решений кубического уравнения он дает?

УКАЗАНИЕ. Сделайте замену $x = ay$.

Задача 23.3. а) Напомним, что функция $\operatorname{sh} \alpha = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2}$ называется *гиперболическим синусом*. Докажите для нее формулу

$$\operatorname{sh} 3\alpha = 3 \operatorname{sh} \alpha + 4 \operatorname{sh}^3 \alpha.$$

б) Воспользуйтесь этой формулой так же, как в предыдущей задаче, и найдите гиперболически-тригонометрическую формулу для решения уравнения $x^3 + px + q = 0$ с действительными коэффициентами. Когда она работает? Сколько решений дает?

Задача 23.4 (метод Феррари). Рассмотрим уравнение $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ с корнями x_1, x_2, x_3, x_4 . Пусть $y_1 = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)$, $y_2 = (x_1 + x_3)(x_2 + x_4)$, $y_3 = (x_1 + x_4)(x_2 + x_3)$. Возьмем уравнение $y^3 + ay^2 + by + c = 0$, корнями которого являются y_1, y_2, y_3 .

а) Выразите a, b, c через p, q, r .

УКАЗАНИЕ. Попробуйте избежать прямого вычисления — оно громоздкое.

ОТВЕТ: $a = -2p$, $b = p^2 - 4r$, $c = q^2$.

б) Придумайте метод решения уравнения четвертой степени.

Задача 23.5. С помощью метода Феррари решите следующие уравнения четвертой степени:

а) $x^4 + 4x + 3 = 0$;

б) $x^4 + 2x^2 + 4x + 2 = 0$;

в) $x^4 + 480x + 1924 = 0$.

УКАЗАНИЕ. Вспомогательное уравнение можно решать как угодно, не обязательно пользоваться формулой Кардано.