

Симметрические многочлены

Задача 6.1. Найдите сумму квадратов и произведение всех комплексных корней многочлена:

а) $3x^3 + 2x^2 - 1$; б) $x^4 - x^2 - x - 1$.

Задача 6.2. Найдите сумму чисел, обратных к корням многочленов из предыдущей задачи.

Задача 6.3. Многочлен $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ имеет корни $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Выпишите многочлен, корнями которого являются:

а) $-\alpha_1, \dots, -\alpha_n$; б) $1/\alpha_1, \dots, 1/\alpha_n$ (при условии, что все $\alpha_i \neq 0$).

Задача 6.4. Найдите значения всех элементарных симметрических многочленов от корней n -й степени из единицы.

Задача 6.5. Выразите в виде многочленов от элементарных симметрических:

а) $(x_1 - 1)(x_2 - 1)(x_3 - 1)$;

б) $x_1^2 + \dots + x_n^2$;

в) $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2$;

г) $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 2x_1^2 x_2^2 - 2x_1^2 x_3^2 - 2x_2^2 x_3^2$;

д) $(x_1 + x_2 + 1)(x_1 + x_3 + 1)(x_2 + x_3 + 1)$;

е) $(x_1 x_2 + x_3)(x_1 x_3 + x_2)(x_2 x_3 + x_1)$.

ж) $(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)$;

з) $x_1^3 + \dots + x_n^3$;

и) $x_1^2 x_2 x_3 + \dots$;

к) $x_1^3 x_2^2 + \dots$.

Задача 6.6. При каком соотношении на p и q корни x_1, x_2, x_3 многочлена $x^3 + px + q$ удовлетворяют условию $x_3 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ (при некоторой нумерации корней)?

Задача 6.7. а) Рассмотрим многочлен $P(t) = (1 + x_1 t) \dots (1 + x_n t)$ от переменных $x_1, \dots, x_n, t$. Докажите, что $P(t) = 1 + e_1 t + e_2 t^2 + \dots + e_n t^n$.

б) Пусть $s_k = x_1^k + \dots + x_n^k$. Докажите, что $\frac{d}{dt} \ln P(t) = \sum_{k \geq 1} (-1)^{k+1} s_k t^{k-1}$.

Задача 6.8*. а) Пусть

$$h_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n} x_{i_1} \dots x_{i_k}, \quad k \geq 0.$$

Выразите в виде рациональной функции ряд $Q(t) = \sum_{k \geq 0} h_k t^k$. Как этот ряд связан с рядом из предыдущей задачи?

б) Докажите тождества

$$e_k - e_{k-1} h_1 + e_{k-2} h_2 - \dots + (-1)^{k-1} e_1 h_{k-1} + (-1)^k h_k = 0, \quad k \geq 0.$$

в) Выразите h_1, h_2, h_3 через e_k .