

Перечисление деревьев

— Счел ли ты деревья?
— Как счесть деревья? — смеясь, сказал Степан Аркадьич...
— Сочесть пески, лучи планет хотя и мог бы ум высокий...

Л. Н. Толстой

Задача 7.1. Сколько существует бамбуков (деревьев, у которых каждая вершина имеет степень 1 или 2) на n пронумерованных вершинах?

Задача 7.2. У каких деревьев все символы кода Прюфера различны?

Задача 7.3. Сколько существует деревьев на n пронумерованных вершинах, в которых первая вершина имеет степень k ?

Задача 7.4. Пусть $F_{n,k}$ — количество лесов на n вершинах из k корневых деревьев. Докажите биективно, что $knF_{n,k+1} = (n-k)F_{n,k}$. Выведите отсюда формулу для $F_{n,k}$.

Задача 7.5. а) Сколько остовных деревьев у полного двудольного графа $K_{n,2}$?
б*) То же для $K_{n,m}$.

▷ Напомним, что экспоненциальная производящая функция последовательности a_n — это формальный ряд $a(t) = \sum a_n t^n / n!$.

Задача 7.6. Пусть $T(t)$ — экспоненциальная производящая функция для корневых деревьев на n пронумерованных вершинах. Докажите, что она удовлетворяет уравнению $T = t \cdot \exp(T)$.

(продолжение на обороте)

Матричная теорема о деревьях

Задача 7.7. Пусть A — матрица смежности графа (т.е. A_{ij} есть количество ребер между вершинами i и j).

а) Каков комбинаторный смысл матричных элементов матрицы A^l ?

б) Докажите, что количество путей длины l в полном графе K_n , начинающихся и заканчивающихся в данной вершине, равно $\frac{1}{n}[(n-1)^l + (-1)^l(n-1)]$.

▷ В следующей задаче вам потребуется *формула Коши–Бине*. Она утверждает, что для двух матриц A, B размера $m \times n$ и $n \times m$ соответственно

$$\det(AB) = \sum_S \det A_{[m],S} \det B_{S,[m]},$$

где M_{IJ} — подматрица, из строк с номерами из I и столбцов с номерами из J , а суммирование ведется по всем таким подмножествам $S \subset [n]$, что $|S| = m$.

В частности, случай $m = n$ — это просто мультипликативность определителя.

Задача 7.8. Пусть ∂ — отображение [ребро] $\mapsto$ [конец] — [начало] из векторного пространства, натянутого на ребра, в векторное пространство, натянутое на вершины данного (ориентированного) графа. Пусть ∂_0 — результат вычеркивания одной строки из матрицы ∂ .

а) Если граф содержит циклы, то у ∂_0 есть ядро.

б) Если граф является деревом, то $\det \partial_0 = \pm 1$.

в) Определитель матрицы $\partial_0 \partial_0^*$ равен количеству остовных деревьев графа.

Задача 7.9 (матричная теорема о деревьях). а) Чему равны матричные элементы матрицы Лапласа $\Delta := \partial \partial^*$ графа?

б) Покажите, что число остовных деревьев графа на n вершинах равно произведению ненулевых собственных значений его матрицы Лапласа, деленному на n .

Задача 7.10. Найдите собственные значения матрицы Лапласа графа K_n и докажите, что количество деревьев на n пронумерованных вершинах равно n^{n-2} .

Задача 7.11. Найдите количество остовных деревьев

а) в полном двудольном графе $K_{m,n}$;

б) в 1-остове n -мерного куба.