

## q-бином

▷ Напомним, что  $[n] = 1 + q^2 + \dots + q^{n-1}$ ,  $[n]! = [n] \cdot [n-1] \cdot \dots \cdot [1]$ ,  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[k]! \cdot [n-k]!}$ .

**Задача 4.1.** а) Докажите, что  $[n]!$  — производящая функция перестановок чисел от 1 до  $n$  по числу беспорядков.

б) Докажите, что  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$  — производящая функция перестановок  $k$  единиц и  $n-k$  двоек по числу беспорядков. в) Обобщите на случай большего числа символов.

**Задача 4.2\*.** Выразите через  $[n]!$  количество обратимых линейных операторов на  $n$ -мерном пространстве над полем из  $q$  элементов.

**Задача 4.3.** Чему равен предел (в смысле формальных рядов)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ ?

**Задача 4.4.** На лекции объяснялось, что

$$(1+qx)(1+q^2x)\dots(1+q^nx) = \sum_k q^{\frac{k(k+1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k.$$

Докажите еще одну версию  $q$ -бинома:

$$\frac{1}{(1-x)(1-qx)(1-q^2x)\dots(1-q^nx)} = \sum_k \begin{bmatrix} n+k \\ n \end{bmatrix} x^k.$$

**Задача 4.5.** Докажите  $q$ -аналоги утверждений задачи 1.5:

а)  $(q^k - 1) \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (q^n - 1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$ ; б)  $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n-k \\ m-k \end{bmatrix}$ .

**Задача 4.6.** Как известно,  $\sum_k (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ . Докажите, что  $\sum_k (-1)^k q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = 0$ .

▷ Вычислить сумму  $\sum_k (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$  заметно сложнее. Мораль: хороший  $q$ -аналог не всегда легко угадать.

**Задача 4.7.** Докажите, что

а)  $\begin{bmatrix} k \\ k \end{bmatrix} + q \begin{bmatrix} k+1 \\ k \end{bmatrix} + \dots + q^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix}$ ; б)  $\begin{bmatrix} m+n \\ k \end{bmatrix} = \sum_{i+j=k} q^{(n-i)j} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}$ .

**Задача 4.8.** Докажите, что

$$x^n = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (x-1)(x-q)\dots(x-q^{k-1}).$$

(Указание: сколько существует линейных отображений из  $n$ -мерного векторного пространства в  $x$ -элементное? Тж. ср. с задачей 1.12.)