

Другое доказательство пентагональной теоремы

▷ Рассмотрим бесконечное произведение

$$f(x) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + xq^k)(1 + x^{-1}q^{k-1}).$$

Его можно рассматривать как *ряд Лорана* по x :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(q)x^n,$$

коэффициенты которого $a_n(q)$ суть формальные степенные ряды от q .

Задача π.1. Проверьте, что $f(xq) = x^{-1}q^{-1}f(x)$.

Задача π.2. Докажите, что при $n \in \mathbb{Z}$ имеют место равенства:

а) $a_n(q)q^{n+1} = a_{n+1}(q)$; б) $f(x) = a_0(q) \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n(n+1)/2} x^n$.

Задача π.3. Пусть b_m есть число способов представить число m в виде суммы нескольких различных элементов множества $\{1, 2, 3, \dots\}$ и такого же числа различных элементов множества $\{0, 1, 2, \dots\}$. Покажите, что $a_0(q) = \sum_{m \geq 0} b_m q^m$.

Задача π.4. Докажите, что b_m равно $p(m)$, т.е. числу разбиений числа m .

УКАЗАНИЕ. Постройте биекцию между представлениями из предыдущей задачи и диаграммами Юнга.

Задача π.5 (тождество Якоби для тройного произведения). Выведите из предыдущих задач равенство

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + xq^n)(1 + x^{-1}q^{n-1})(1 - q^n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{m(m+1)/2} x^m.$$

Задача π.6. а) Выведите из q -биномиальной теоремы тождество

$$x^m q^{-\frac{m(m-1)}{2}} (1 + x^{-1}q^{m-1})(1 + x^{-1}q^{m-2}) \dots (1 + x^{-1}) \times \\ \times (1 + xq)(1 + xq^2) \dots (1 + xq^m) = \sum_{k=0}^{2m} \begin{bmatrix} 2m \\ k \end{bmatrix} q^{\frac{k(k+1)}{2} - mk} x^k.$$

б) Докажите *конечную форму тождества Якоби*:

$$\prod_{k=1}^m (1 + xq^k)(1 + x^{-1}q^{k-1}) = \sum_{j=-m}^m \begin{bmatrix} 2m \\ m+j \end{bmatrix} q^{\frac{j(j+1)}{2}} x^j.$$

в) Выведите из него результат предыдущей задачи.

Задача π.7 (пентагональная теорема Эйлера). Используя тождество Якоби, покажите, что

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{m(3m-1)/2}.$$

УКАЗАНИЕ. Полезно сделать замену $q \mapsto q^3$, $x \mapsto -q^{-1}$.