

1. ПРОВЕДЕНИЕ ЭКЗАМЕНА ПО АЛГЕБРЕ (СОВБАК ВШЭ-ЦПМ, 1 АПРЕЛЯ 2022 Г.,  
ЛЕКТОР — Е.Ю.СМИРНОВ)

На экзамене сдающим будет предложен билет с двумя теоретическими вопросами из списка и одной задачей (список задач заранее неизвестен). Время на подготовку — 45 минут, пользоваться при подготовке ничем нельзя. Утверждения (теоремы и др.) из билета следует приводить с доказательствами, если обратное не указано явно.

Каждый вопрос и задача оцениваются из 4 баллов. Экзаменатор вправе задавать дополнительные вопросы, в т.ч. относящиеся к другим билетам; за ответы на дополнительные вопросы можно получить от  $-2$  до  $+2$  баллов к итоговой оценке. Оценка за экзамен — это сумма оценок за три вопроса в билете и за дополнительные вопросы (или 10, если эта сумма больше 10).

2. СПИСОК ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ВОПРОСОВ

- (1) Циклические группы, их свойства. Подгруппы циклических групп.
- (2) Группы, подгруппы, левые и правые смежные классы. Теорема Лагранжа, её следствия.
- (3) Действия групп. Орбиты и стабилизаторы действия группы на множестве. Связь между порядками орбиты и стабилизатора.
- (4) Нормальные подгруппы. Факторгруппы. Теорема о гомоморфизме.
- (5) Формула Бернсайда для числа орбит группы.
- (6) Симметрическая группа. Классы сопряженности в  $S_n$ .
- (7) Порождённости  $S_n$  транспозициями, простыми транспозициями, транспозицией и длинным циклом.
- (8) Порождённости знакопеременной группы  $A_n$  тройными циклами, парами транспозиций (при  $n \geq 5$ ).
- (9) Простота группы  $A_5$  (любое из доказательств).
- (10) Автоморфизмы групп. Внутренние автоморфизмы. Автоморфизмы  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .
- (11) Коммутант группы. Коммутант как наименьшая нормальная группа с абелевым фактором.
- (12) Коммутанты групп  $S_n$  и  $A_n$ . Разрешимые группы.
- (13) Конечнопорождённые абелевы группы. Свободные конечнопорождённые абелевы группы, базис, ранг, корректность определения ранга.
- (14) Подгруппы свободных абелевых групп, их ранги.
- (15) Теорема о взаимных базисах в свободной абелевой группе и ее подгруппе.
- (16) Каноническое и примарное разложение конечнопорожденной абелевой группы (существование).
- (17) Подгруппы кручения и  $p$ -кручения в конечнопорожденной абелевой группе. Их независимость от выбора примарного разложения.
- (18) Единственность примарного разложения для группы  $p$ -кручения.
- (19) Разрешимость уравнения в радикалах. Разрешимость уравнений второй и третьей степени, формула Кардано. Уравнение пятой степени, неразрешимое в радикалах (без доказательства).