

## Формула Бернсайда

**Задача 17.1.** Найдите число разных раскрасок граней куба в: а) три цвета; б)  $n$  цветов. Раскраски считаются одинаковыми, если их можно совместить, повернув в руках.

**Задача 17.2.** Имеются одинаковые по форме бусины, раскрашенные в  $n$  попарно разных цветов (запас бусин каждого из цветов неограничен). Сколько различных на вид ожерелий можно изготовить из: а) 3; б) 4; в) 7; г) 8; д) 9; е\*)  $k$  бусин? Ожерелья можно совмещать поворотом, но не переворачивать.

## Нормальные подгруппы

**Задача 17.3.** Найдите все нормальные подгруппы в группах: а)  $S_3$ ; б)  $A_4$ ; в)  $S_4$ , и опишите соответствующие факторгруппы.

**Задача 17.4.** Пусть даны три вложенные друг в друга группы  $K \subset H \subset G$ , причем  $K \triangleleft H$  и  $H \triangleleft G$ . Обязательно ли  $K \triangleleft G$ ?

**Задача 17.5 (Kleinsche Vierergruppe).** Постройте гомоморфизм  $S_4 \rightarrow S_3$  и опишите его ядро. Оно обозначается  $V_4$  и называется *четверной группой Клейна*.

**Задача 17.6.** Докажите, что всякая подгруппа индекса 2 нормальна.

**Задача 17.7.** Пусть  $H \subset G$  — подгруппа индекса 2,  $C \subset G$  — класс сопряженных элементов в  $G$ , и пусть  $C \subset H$ . Докажите, что либо  $C$  является классом сопряженности в  $H$ , либо  $C$  распадается на два класса сопряженности в  $H$ , состоящих из одинакового числа элементов.

**Задача 17.8.** Сопоставим отображению  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$  дробно-линейное преобразование  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ . Докажите, что это отображение является гомоморфизмом, и найдите его ядро.