

Расширения полей

Задача 10.1. Найдите степень расширения поля а) $\mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{3}]$; б) $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}]$ над $\mathbb{Q}$.

Задача 10.2. Найдите степень расширения $\mathbb{Q}$: а) корнем многочлена $x^3 + px + q$; б) корнем многочлена $x^4 + 4$.

Задача 10.3. Найдите степень и минимальный многочлен элемента $2 \cos 2\pi/5$ над $\mathbb{Q}$. Можно ли построить циркулем и линейкой правильный пятиугольник?

Задача 10.4*. Найдите степень и минимальный многочлен элемента $2 \cos 2\pi/7$ над $\mathbb{Q}$. Можно ли построить циркулем и линейкой правильный семиугольник?

УКАЗАНИЕ. Какие решения имеет уравнение $\cos 3\varphi = \cos 4\varphi$?

Задача 10.5. Докажите, что $\sqrt{7}$ не лежит в $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}]$.

▷ Напомним, что число $\alpha \in \mathbb{C}$ называется *алгебраическим*, если оно является корнем многочлена с рациональными коэффициентами.

Задача 10.6. Докажите, что: а) сумма двух алгебраических чисел; б) произведение алгебраических чисел; в) обратное к алгебраическому числу — алгебраическое число.

Задача 10.7*. Докажите, что задача а) о трисекции угла; б) об удвоении куба разрешима при помощи циркуля и линейки с делениями.

* * *

Задача 10.8. Пусть $K \subset L$ — расширение полей, $\alpha, \beta \in L$ алгебраичны над K . Предположим, что минимальные многочлены для α и β разлагаются над L на линейные множители.

а) Постройте многочлен из $K[x]$, аннулирующий элемент $\alpha + \beta$.

УКАЗАНИЕ. Воспользуйтесь основной теоремой о симметрических многочленах.

б) Выведите отсюда результат задачи 10.6.

Задача 10.9. а) Опишите все поля K , для которых $\mathbb{Q} \subset K \subset \mathbb{Q}[i\sqrt{2}]$.

б) Пусть $F \subset F[\alpha]$ — конечное расширение полей. Докажите, что существует лишь конечное число промежуточных полей K , т.е. полей, для которых $F \subset K \subset F[\alpha]$.

Задача 10.10 (теорема о примитивном элементе). Пусть $F \subset F[\alpha, \beta]$ — алгебраическое расширение полей нулевой характеристики. Пусть $m_\alpha(x)$ и $m_\beta(x)$ — минимальные многочлены элементов α и β соответственно.

а) Рассмотрим элемент вида $\theta = \alpha + t\beta$, где $t \in F$ — параметр. Обозначим $g(x) = m_\alpha(\theta - tx) \in F[\theta][x]$ (поле $F[\theta]$ зависит от параметра). Покажите, что существует t , для которого β есть единственный общий корень многочленов $m_\beta(x)$ и $g(x)$ в поле F .

б) Покажите, что существует такой элемент $\theta \in F[\alpha, \beta]$, для которого $F[\alpha, \beta] = F[\theta]$.