

1. ПРОВЕДЕНИЕ ЭКЗАМЕНОВ ПО АЛГЕБРЕ (СОВБАК ВШЭ-ЦПМ, ОСЕНЬ 2021 Г., ЛЕКТОР — Е.Ю.СМИРНОВ)

В понедельник 20 декабря будет очная сдача. В четверг 23 декабря — дистанционная, в Zoom. Это именно два потока, а не две попытки: если вы пришли на очный экзамен и остались недовольны результатом, прийти на дистанционный нельзя.

На *очном экзамене* сдающим будет предложен билет с двумя теоретическими вопросами из списка и одной задачей (список задач заранее неизвестен). Время на подготовку — 45 минут, пользоваться при подготовке ничем нельзя. Утверждения (теоремы и др.) из билета следует приводить с доказательствами, если обратное не указано явно.

Каждый вопрос и задача оцениваются из 4 баллов. Экзаменатор вправе задавать дополнительные вопросы, в т.ч. относящиеся к другим билетам; за ответы на дополнительные вопросы можно получить от -2 до $+2$ баллов к итоговой оценке. Оценка за экзамен — это сумма оценок за три вопроса в билете и за дополнительные вопросы (или 10, если эта сумма больше 10).

На *дистанционном экзамене* сдающий получает билет с двумя задачами (список заранее неизвестен). Задачи будут в среднем сложнее, чем предлагаемые на очном экзамене. Время на подготовку — 45 минут; при подготовке можно использовать конспекты/книги, но не разрешается общаться с кем-либо, спрашивать решения у друзей, на форумах и проч.

Каждая задача оценивается из 4 баллов. После этого следует блиц-опрос по теории: экзаменатор спрашивает у сдающего несколько определений, формулировок теорем и т.п. из приведенного списка; на вопросы нужно отвечать сразу, без подготовки. Доказательства при этом приводить не нужно. Блиц-опрос по теории также оценивается из четырех баллов; оценка за экзамен — сумма оценок за задачи и блиц-опрос по теории (или 10, если сумма больше 10).

2. СПИСОК ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ВОПРОСОВ К ОЧНОМУ ЭКЗАМЕНУ ПО АЛГЕБРЕ 20 ДЕКАБРЯ 2021 Г.

- (1) Алгоритм Евклида в $\mathbb{Z}$ и $K[x]$. Линейное выражение НОД. Решение линейных диофантовых уравнений.
- (2) Основная теорема арифметики в $\mathbb{Z}$ и $K[x]$.
- (3) Кольцо вычетов $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, его свойства. Малая теорема Ферма. Теорема Вильсона.
- (4) Кольца, идеалы. Кольца главных идеалов, евклидовы кольца: определение, основные свойства.
- (5) Факторкольца: определение, примеры. Гомоморфизмы колец. Теорема о гомоморфизме.
- (6) Простые и максимальные идеалы: определение, примеры, основные свойства.
- (7) Многочлены над $\mathbb{Z}$, лемма Гаусса о многочленах с целочисленными коэффициентами, факториальность $\mathbb{Z}[x]$.
- (8) Признак Эйзенштейна неприводимости многочлена. Неприводимость циклотомического многочлена $(x^p - 1)/(x - 1)$ при простом p .
- (9) Симметрические многочлены. Основная теорема о симметрических многочленах: существование.
- (10) Симметрические многочлены. Основная теорема о симметрических многочленах: единственность.
- (11) Определитель Вандермонда, его вычисление (любым способом).

- (12) Квадратичные вычеты. Символ Лежандра, его мультипликативность (любое доказательство). Квадратичный закон взаимности (без доказательства).
- (13) Критерий Эйлера для символов Лежандра. Лемма Гаусса. Вычисление символов Лежандра для -1 и 2 .
- (14) Поля. Расширение полей, степень расширения. Мультипликативность степеней.
- (15) Присоединение корня неприводимого многочлена. Степень полученного расширения.
- (16) Построения циркулем и линейкой. Невозможность построения $\sqrt[3]{2}$.
- (17) Невозможность трисекции угла циркулем и линейкой.
- (18) Теорема о цикличности мультипликативной группы конечного поля.
- (19) Алгебраические элементы над $\mathbb{Q}$. Алгебраическое замыкание $\overline{\mathbb{Q}}$.
- (20) Цикличность мультипликативной группы конечного поля.
- (21) Конечные поля. Существование и единственность конечного поля с заданным числом элементов.

3. СПИСОК ОПРЕДЕЛЕНИЙ И ФОРМУЛИРОВОК

- Кольцо. Поле. Целостное кольцо, делители нуля. Идеал, максимальный идеал, простой идеал. Факторкольцо. Факторкольца по простому и максимальному идеалу. Гомоморфизм колец, ядро и образ гомоморфизма. Теорема о гомоморфизме.
- Кольцо вычетов $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Малая теорема Ферма. Теорема Вильсона. Квадратичные вычеты и невычеты. Символ Лагранжа, его мультипликативность. Символы Лагранжа для -1 и 2 . Квадратичный закон взаимности.
- Кольцо главных идеалов, евклидово кольцо. Неприводимые элементы. Факториальное кольцо. Основная теорема арифметики.
- Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида (в евклидовом кольце), линейное выражение НОД. Гауссовы целые числа, их факториальность, неприводимые элементы в $\mathbb{Z}[i]$.
- Содержание многочлена, примитивный многочлен. Лемма Гаусса о многочленах с целыми коэффициентами. Признак Эйзенштейна неприводимости многочлена над $\mathbb{Z}$.
- Симметрические многочлены. Элементарные симметрические многочлены. Теорема Виета. Основная теорема о симметрических многочленах.
- Результант двух многочленов, различные его представления. Дискриминант многочлена, выражение через корни многочлена, связь между результатом и дискриминантом. Определитель Вандермонда.
- Расширение полей. Конечное расширение. Степень расширения, мультипликативность степени. Поле разложения многочлена, его единственность. Присоединение корня многочлена к полю. Алгебраические элементы.
- Конечное поле, существование и единственность конечного поля с заданным числом элементов. Цикличность мультипликативной группы конечного поля. Гомоморфизм Фробениуса.