

Многочлены

Задача 5.1. Разложите на неприводимые множители над $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$ многочлены:

- а) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$; б) $x^4 + 4$; в) $x^6 + 27$; г) $x^{2n} + x^n + 1$; д) $\cos(n \arccos x)$.

Задача 5.2. Докажите, что многочлен

$$1 + x + x^2/2! + \cdots + x^n/n!$$

не имеет кратных корней.

Задача 5.3. Найдите все кратные комплексные корни многочлена

$$x^7 + 7x^5 - 36x^4 + 15x^3 - 216x^2 + 9x - 324.$$

Задача 5.4. Найдите все рациональные корни многочленов:

- а) $x^3 - 6x^2 + 15x - 14$; б) $x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 13x - 24$; в) $24x^5 + 10x^4 - x^3 - 19x^2 - 5x + 6$.

Задача 5.5. Докажите неприводимость над $\mathbb{Q}$ многочленов:

- а) $x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 6x + 2$; б) $x^5 - 12x^3 + 36x - 12$; в*) $x^{105} - 9$;
г) $\Phi_p(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$ (число p простое).

УКАЗАНИЕ. Сделайте замену $y = x - 1$.

Задача 5.6. Найдите все неприводимые многочлены степени не выше 4 над полем $\mathbb{F}_2$.

Дискриминант

Задача 5.7. Число $D_f = \prod_{i < j} (\alpha_i - \alpha_j)^2$ называется *дискриминантом* приведённого многочлена $f(x) = \prod (x - \alpha_i)$. Выразите через p и q дискриминанты квадратных трёхчленов: а) $x^2 + px + q$; б) $x^3 + px + q$.

Задача 5.8. Пусть $p, q \in \mathbb{R}$. Докажите, что кубический трёхчлен $f(x) = x^3 + px + q$ имеет три различных вещественных корня тогда и только тогда, когда его дискриминант D_f положителен. При этом подходящая замена $x = \lambda t$ приводит уравнение $f(x) = 0$ к виду $4t^3 - 3t = a$, где $a \in \mathbb{R}$ и $|a| \leq 1$. Пользуясь формулой для косинуса тройного угла, выразите корни последнего уравнения через тригонометрические функции.

Задача 5.9. Решите в тригонометрических функциях уравнения:

- а) $x^3 - 3x + 1 = 0$; б) $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$.