

## Повторенье — мать ученья!

**12.1.** Решите уравнения: **а)**  $z^3 = (2z - 1)^3$  **б)**  $z^4 + 2z^3 + 4z^2 + 8z + 16 = 0$  **в)**  $z^{\frac{3}{4}} = -4\sqrt{3} + 4i$

**12.2.** Линейный оператор  $A : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$  задан в некотором базисе матрицей. Найдите его собственные вектора и собственные значения. Диагонализировать ли данный оператор? Если да, найдите диагональную матрицу и соответствующий базис. Проверьте непосредственно, что базис найден верно.

**а)**  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \end{pmatrix}$  **б)**  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

**в)** Запишите матрицу  $A$  оператора  $\varphi : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R}), A \rightarrow 2A^T - A$  в базисе  $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$  и выполните задание.

**12.3.** Рассмотрим оператор из пункта б) предыдущей задачи как  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Найдите двумерное инвариантное подпространство. Найдите базис над  $\mathbb{R}$ , в котором матрица оператора блочно-диагональна.

**12.4.** Линейное преобразование евклидова пространства со стандартным скалярным произведением задано в базисе  $v_1, v_2, v_3$  матрицей  $A$ . Найдите матрицу  $A^*$  сопряженного оператора в этом же базисе, если

**а)**  $v_1 = (1, 0), v_2 = (1, 1), A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

**б)**  $v_1 = (1, 2, 1), v_2 = (1, 1, 2), v_3 = (1, 1, 0), A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$

**12.5.** Для оператора пункта а) предыдущей задачи найдите произведение  $AA^*$  в данном и ортогональном базисах. Докажите, что оператор  $AA^*$  самосопряжен. Убедитесь, что собственные вектора ортогональны, и найдите ортонормированный базис в котором матрица оператора  $AA^*$  диагональна.

**12.6.** Приведите квадратичную форму  $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  к главным осям и найдите соответствующий ортогональный базис, если

**а)**  $q((x_1, x_2, x_3)) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$

**б)**  $q((x_1, x_2, x_3)) = 2x_1^2 + 18x_2^2 + 8x_3^2 - 12x_1x_2 + 8x_1x_3 - 27x_2x_3$

**12.7.** Найдите  $A^{50}$ , если

**а)**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$  **б)**  $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$