

Коллоквиум по линейной алгебре

ФАКУЛЬТЕТ ФИЗИКИ НИУ ВШЭ, ПЕРВЫЙ КУРС

10 декабря 2019 г.

Блиц-опрос по теории

В качестве допуска к коллоквиуму студент получает три вопроса на знание определений и формулировок теорем из следующего списка. На эти вопросы надо ответить без подготовки. Ответивший на все три вопроса получает 2 балла, на два — 1 балл, для не ответивших на два из этих вопросов коллоквиум заканчивается.

Векторное пространство. Линейная зависимость векторов. Основная лемма о линейной зависимости. Базис. Линейное отображение. Матрица линейного отображения. Ранг матрицы. Теорема о ранге матрицы. Теорема Кронекера–Капелли. Ядро и образ линейного отображения. Явная формула для определителя матрицы. Формулы для разложения определителя по строке и столбцу. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Диагонализуемый оператор. Характеристический многочлен линейного оператора. Теорема Гамильтона–Кэли. Билинейная форма. Невырожденная билинейная форма. Скалярное произведение. Евклидово пространство. Ортогональный и ортонормированный базис. Ортогональный оператор, его матрица. Теорема Эйлера.

Далее студент получает билет с теоретическим вопросом и задачей. Вопрос и задача оцениваются из 4 баллов каждый. (Итого максимальная оценка за коллоквиум — $2+4+4=10$ баллов). Ответ на вопрос билета должен быть изложен с полными доказательствами. На подготовку отводится 40 минут, пользоваться при подготовке ничем нельзя.

Теоретические вопросы

1. Комплексные числа. Алгебраическая и тригонометрическая форма. Существование обратного к комплексному числу.
2. Линейная зависимость векторов. Основная лемма о линейной зависимости. Базис векторного пространства.
3. Метод Гаусса решения системы линейных уравнений.
4. Ранг матрицы. Равенство строчного и столбцового рангов. Теорема Кронекера–Капелли.
5. Матрица линейного отображения. Действия с матрицами. Матрица композиции линейных отображений.
6. Перестановки. Четность перестановки. Транспозиции.
7. Определитель матрицы: свойства, явная формула. Критерий равенства определителя нулю.
8. Определитель как полилинейная кососимметрическая функция, его единственность (с точностью до нормировки). Лемма об определителе с углом нулей.

9. Разложение определителя по строке и по столбцу. Формулы Крамера.
10. Обратимые матрицы. Эквивалентность обратимости и невырожденности. Метод поиска обратной матрицы (на выбор: при помощи метода Гаусса или алгебраических дополнений).
11. Линейный оператор. Преобразование линейного оператора при замене базиса. Независимость определителя от выбора базиса.
12. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора, метод их поиска. Характеристический многочлен. Диагонализуемый оператор, достаточное условие диагонализуемости.
13. Скалярное произведение. Евклидово пространство. Неравенство Коши-Буняковского.
14. Линейные операторы в пространстве со скалярным произведением. Ортогональные операторы. Канонический вид ортогонального оператора. Теорема Эйлера.
15. Симметрические операторы, их собственные значения. Канонический вид симметрического оператора.
16. Билинейные формы, связь между билинейными формами и симметрическими операторами. Приведение формы к сумме квадратов.