

Симметрические и ортогональные операторы

10.1. Дополните до ортогонального базиса систему векторов евклидова пространства:

а) $((1, -2, 2, 3), (2, -3, 2, 4));$

б) $((2, 1, 2), (1, 2, -2));$

в) $((1/2, 1/2, 1/2, 1/2), (1/2, 1/2, -1/2, -1/2)).$

10.2. Найдите собственный ортонормированный базис и матрицу в этом базисе симметрического оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};$ б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$ в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix};$ г) $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$

10.3. Найдите канонический базис и матрицу в этом базисе ортогонального оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей

а) $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix};$ б) $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix};$

в) $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ 1 & 3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & 1 \end{pmatrix};$ г) $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$

10.4. Многочлены $P_0(x) = 1$, $P_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dx^k} [(x^2 - 1)^k]$ называются *многочленами Лежандра*.

а) Докажите, что $\deg P_k(x) = k$.

б) Докажите, что многочлены Лежандра ортогональны относительно скалярного произведения $\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$.

в) Найдите явный вид многочленов Лежандра при $k \leq 3$.

г) Докажите, что при применении к системе многочленов $(1, x, x^2, \dots, x^n)$ процесса ортогонализации получается система многочленов, пропорциональных многочленам Лежандра.

