

Разные задачи

6 $\frac{1}{2}$.1. Докажите, что каждую матрицу можно привести к ступенчатому виду, используя лишь элементарные преобразования строк первого типа.

УКАЗАНИЕ. Сначала решите задачу по программированию: как поменять местами значения двух переменных с помощью арифметических операций и операций присваивания, не используя дополнительной памяти?

6 $\frac{1}{2}$.2. Докажите, что ранг матрицы $(A|B)$, полученной приписыванием матрицы B к матрице A , не превосходит суммы рангов матриц A и B .

6 $\frac{1}{2}$.3. Докажите, что ранг суммы матриц не превосходит суммы рангов этих матриц.

6 $\frac{1}{2}$.4. Докажите, что каждая матрица ранга 1 размера $m \times n$ имеет вид $B^T \cdot C$, где $B = (b_1, \dots, b_m)$, $C = (c_1, \dots, c_n)$.

6 $\frac{1}{2}$.5. Пусть задана квадратная матрица размера n

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Докажите, что для любого многочлена $f(x)$

$$f(J) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \dots & \frac{f^{((n-2))}(\lambda)}{(n-2)!} & \frac{f^{((n-1))}(\lambda)}{(n-1)!} \\ 0 & f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \dots & \frac{f^{((n-3))}(\lambda)}{(n-3)!} & \frac{f^{((n-2))}(\lambda)}{(n-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & f(\lambda) \end{pmatrix}.$$

6 $\frac{1}{2}$.6. Существует ли квадратная матрица размера 2×2 , для которой $A^3 \neq 0$, а $A^4 = 0$?

6 $\frac{1}{2}$.7. Существует ли матрица A размера $n \times n$, для которой $A^{2020} = 0$, а $A^{2019} \neq 0$? При каких n это возможно?

6 $\frac{1}{2}$.8. В стаде 101 корова. Известно, что если увести любую корову, то оставшихся можно разделить на два стада по 50 коров в каждом, так что суммарный вес коров первого стада равен суммарному весу коров второго стада. Докажите, что все коровы весят одинаково,

- а) если вес каждой коровы — целое число килограммов;
- б) без такого предположения.

