

## Действия над матрицами

**5.1.** Опишите ядро и образ линейного отображения, заданного следующей матрицей, явно указав в них базисы.

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 & 2 \\ 2 & 4 & -6 & 3 \\ 11 & 17 & -8 & 4 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} \begin{pmatrix} 6 & 9 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{в)} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 7 & 6 & 4 & 3 \\ 7 & 9 & 9 & 6 & 5 \\ 4 & 8 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{г)} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 5 \\ 7 & 10 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

**5.2.** Вычислите:

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 29 \\ 2 & 18 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{б)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{в)} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n.$$

$$\text{г)} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{д)} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}; \quad \text{е)} \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \alpha & \operatorname{sh} \alpha \\ \operatorname{sh} \alpha & \operatorname{ch} \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \beta & \operatorname{sh} \beta \\ \operatorname{sh} \beta & \operatorname{ch} \beta \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\operatorname{sh} \alpha = (e^\alpha - e^{-\alpha})/2$ ,  $\operatorname{ch} \alpha = (e^\alpha + e^{-\alpha})/2$ . Это *гиперболические синус и косинус*.

**5.3.** Найдите матрицу, обратную к матрице:

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}; \quad \text{в)} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}; \quad \text{г)} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix};$$

$$\text{д)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{е)} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{ж)} \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{з)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

**5.4.** Пусть задана квадратная матрица размера  $n$

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Докажите, что для любого многочлена  $f(x)$

$$f(J) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \dots & \frac{f^{(n-2)}(\lambda)}{(n-2)!} & \frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} \\ 0 & f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \dots & \frac{f^{(n-3)}(\lambda)}{(n-3)!} & \frac{f^{(n-2)}(\lambda)}{(n-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & f(\lambda) \end{pmatrix}.$$

**5.5.** Существует ли матрица  $A$  размера  $n \times n$ , для которой  $A^{2020} = 0$ , а  $A^{2019} \neq 0$ ? При каких  $n$  это возможно?

