

Линейная зависимость. Базис.

3.1. Выясните, являются ли линейно зависимыми следующие системы векторов:

- а) $v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (3, 6, 7)$;
- б) $v_1 = (2, -3, 1), v_2 = (3, -1, 5), v_3 = (1, -4, 3)$;
- в) $v_1 = (5, 4, 3), v_2 = (3, 3, 2), v_3 = (8, 1, 3)$;
- г) $v_1 = (4, -5, 2, 6), v_2 = (2, -2, 1, 3), v_3 = (6, -3, 3, 9), v_4 = (4, -1, 5, 6)$.
- д) $v_1 = (1, 0, 0, 2, 5), v_2 = (0, 1, 0, 3, 4), v_3 = (0, 0, 1, 4, 7), v_4 = (2, -3, 4, 11, 12)$.

3.2. Найдите все значения λ , при которых вектор w линейно выражается через v_1, v_2, v_3 :

- а) $v_1 = (2, 3, 5), v_2 = (3, 7, 8), v_3 = (1, -6, 1), w = (7, -2, \lambda)$;
- б) $v_1 = (4, 4, 3), v_2 = (7, 2, 1), v_3 = (4, 1, 6), w = (5, 9, \lambda)$;
- в) $v_1 = (3, 4, 2), v_2 = (6, 8, 7), v_3 = (15, 20, 11), w = (9, 12, \lambda)$;
- г) $v_1 = (3, 2, 5), v_2 = (2, 4, 7), v_3 = (5, 6, \lambda), w = (1, 3, 5)$;
- д) $v_1 = (3, 2, 6), v_2 = (5, 1, 3), v_3 = (7, 3, 9), w = (\lambda, 2, 5)$.

3.3. Докажите, что если векторы $v_1, \dots, v_k$ линейно независимы, а $v_1, \dots, v_k, w$ линейно зависимы, то w линейно выражается через $v_1, \dots, v_k$. Единственно ли это выражение?

3.4. Найдите все базисы системы векторов

- а) $v_1 = (1, 2, 0, 0), v_2 = (1, 2, 3, 4), v_3 = (3, 6, 0, 0)$;
- б) $v_1 = (1, 2, 3, 4), v_2 = (2, 3, 4, 5), v_3 = (3, 4, 5, 6), v_4 = (4, 5, 6, 7)$;
- в) $v_1 = (2, 1, -3, 1), v_2 = (2, 2, -6, 2), v_3 = (6, 3, -9, 3), v_4 = (1, 1, 1, 1)$;
- г) $v_1 = (3, 2, 3), v_2 = (2, 3, 4), v_3 = (4, 3, 4), v_4 = (1, 1, 1)$.

3.5. Найдите какой-нибудь базис системы векторов и выразите через этот базис остальные векторы системы:

- а) $v_1 = (5, 2, -3, 1), v_2 = (4, 1, -2, 3), v_3 = (1, 1, -1, 2), v_4 = (3, 4, -1, 2), v_5 = (7, -6, -7, 0)$;
- б) $v_1 = (2, -1, 3, 5), v_2 = (4, -3, 1, 3), v_3 = (3, -2, 3, 4), v_4 = (4, -1, -15, 17)$;
- в) $v_1 = (1, 2, 3, -4), v_2 = (2, 3, -4, 1), v_3 = (2, -5, 8, -3), v_4 = (5, 26, -9, -12), v_5 = (3, -4, 1, 2)$;
- г) $v_1 = (2, 1, -3), v_2 = (3, 1, -5), v_3 = (4, 2, -1), v_4 = (1, 0, -7)$.

3.6. Пусть векторы $v_1, \dots, v_k$ линейно независимы. Выясните, будут ли линейно независимыми векторы:

- а) $w_1 = v_1, w_2 = v_1 + v_2, w_3 = v_1 + v_2 + v_3, \dots, w_k = v_1 + \dots + v_k$;
- б) $w_1 = v_1 + v_2, w_2 = v_2 + v_3, w_3 = v_3 + v_4, \dots, w_{k-1} = v_{k-1} + v_k, w_k = v_k + v_1$.

3.7. Пусть векторы $v_1, \dots, v_k$ линейно независимы. Найдите все базисы системы векторов

$$w_1 = v_1 - v_2, \quad w_2 = v_2 - v_3, \quad \dots, \quad w_{k-1} = v_{k-1} - v_k, \quad w_k = v_k - v_1.$$

