

Комплексные числа

1.1. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа:

а) $3i$; б) $-2 - 2i$; в) $1 + i\sqrt{3}$; г) $3 + 4i$.

1.2. Представьте в алгебраической форме комплексные числа:

а) $2\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$; б) $2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$; в) $\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6}$.

1.3. Вычислите:

а) $(2 + 3i)(3 - i) + (2 + 3i)(3 + 4i)$;

б) $(2 + i)(3 + 7i) - (1 + 2i)(5 + 3i)$;

в) $(4 + i)(5 + 3i) - (3 + i)(3 - i)$;

г) $(5 + i)(3 + 5i)/2i$;

д) $(3 - i)(1 - 4i)/(2 - i)$;

е) $(1 + i)^5/(1 - i)^3$.

1.4. Вычислите: а) i^{25} ; б) $(1 + i)^{100}$; в) $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{30}$.

1.5. Решите в комплексных числах уравнения:

а) $(1 + i)z = 3 + i$; б) $z^2 + (2i - 7)z + (13 - i) = 0$;

в) $z^2 - (3 - i)z + 4 - 3i = 0$; г) $z^2 = i$;

д) $z^3 = 1$; е) $z^3 = i$; ж) $\bar{z} = z^3$.

1.6. Какие множества на плоскости описываются следующими условиями:

а) $|z| \leq 2$; б) $|z| = z$; в) $|z + 1 - i| = \sqrt{2}$; г) $\left|\frac{z+1}{z-1}\right| = 1$;

д) $|z + i| + |z - i| = 2$; е*) $|z + i| + |z - i| = 3$?

1.7. Вычислите сумму и произведение

а) всех корней степени n из единицы;

б) s -х степеней всех корней степени n из единицы.

1.8. Вычислите $z^m + \frac{1}{z^m}$, если $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \varphi$.

1.9. Выразите $\cos 2\varphi$, $\cos 3\varphi$, $\cos 4\varphi$, $\cos 5\varphi$ через $\cos \varphi$.

1.10. Решите системы уравнений:

а)
$$\begin{cases} (1 + i)z + (1 - i)w = 1 + i; \\ (1 - i)z + (1 + i)w = 1 + 3i; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} (1 - i)z - 3w = -i; \\ 2z + (3 + 3i)w = 3 - i. \end{cases}$$

1.11. Куда переводятся отображениями $z \mapsto (-1 + \sqrt{3}i)z/2$; $z \mapsto z^2$; $z \mapsto 1/z$

а) прямая $y = kx$;

б) декартова и полярная координатная сетки;

в) окружность $|z + i| = 1$?

