

31. Последняя лекция, 11 июня 2019 г.

31.1. Кватернионы. Рассмотрим четырехмерное вещественное векторное пространство V с базисом $\{1, i, j, k\}$. Введём на этом пространстве некоммутативное умножение, определив его на базисных элементах при помощи следующей таблицы:

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

УПРАЖНЕНИЕ 31.1. Проверьте, что эту таблицу умножения можно вывести из следующих соотношений: $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

Мы утверждаем, что определенное таким образом умножение задаёт на V структуру ассоциативной алгебры с единицей, которую мы будем обозначать через $\mathbb{H}$. Она называется алгеброй кватернионов, а её элементы — кватернионами. Элементы $1, i, j, k$ называются базисными кватернионами. Ассоциативность алгебры $\mathbb{H}$ можно проверить непосредственно, но мы поступим иначе: реализуем ее в качестве подалгебры в алгебре матриц $\text{Mat}_2(\mathbb{C})$.

Рассмотрим следующее отображение $\mathbb{H} \rightarrow \text{Mat}_2(\mathbb{C})$:

$$1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad i \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad j \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}; \quad k \mapsto \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Легко видеть (проверьте это!), что это действительно гомоморфизм алгебр над $\mathbb{R}$. При нём кватернион $a + bi + cj + dk$ соответствует матрице $\begin{pmatrix} a + di & -b - ci \\ b - ci & a - di \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}$, где $z, w \in \mathbb{C}$. Кроме того, все такие матрицы, кроме нулевой, невырождены:

$$\det \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} = z\bar{z} + w\bar{w} = |z|^2 + |w|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2. \quad (*)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 31.2. *Нормой* кватерниона z называется вещественное неотрицательное число $|z| = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^{1/2}$. Кватернион $\bar{z} = a - bi - cj - dk$ называется *сопряжённым* к z .

Норма есть положительно определённая квадратичная форма на $\mathbb{H}$, поэтому она задаёт на $\mathbb{H}$ структуру евклидова пространства.

Как и для комплексных чисел, $z\bar{z} = |z|^2$.

Однако, в отличие от $\mathbb{C}$, сопряжение в $\mathbb{H}$ является не автоморфизмом, а *антиавтоморфизмом*: $\overline{zw} = \bar{w} \cdot \bar{z}$.

УПРАЖНЕНИЕ 31.3. Проверьте это.

Кроме того, $|zw| = |z||w|$. Это следует, например, из равенства $(*)$ и мультипликативности определителя, или из равенства $|zw|^2 = zw\bar{z}\bar{w} = zw\bar{w}\bar{z} = |z|^2|w|^2$.

Понятие нормы позволяет найти для каждого ненулевого кватерниона z обратный: такой кватернион z^{-1} , что $zz^{-1} = z^{-1}z = 1$. Он находится по формуле $z^{-1} = \bar{z}/|z|^2$. Поэтому $\mathbb{H}$ является *алгеброй с делением*, или *телом* (т.е. “некоммутативным полем”).

31.2. Кватернионы единичного модуля и чисто мнимые кватернионы. Множество кватернионов единичного модуля образует группу по умножению, которую мы обозначим через $\text{SU}(2)$. Геометрически $\text{SU}(2)$ является трёхмерной сферой S^3 , т.к. оно задаётся уравнением $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Следующее предложение объясняет это, на первый взгляд, странное обозначение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 31.4. *При описанном выше гомоморфизме $\mathbb{H} \rightarrow \text{Mat}_2(\mathbb{C})$ кватернионам из $\text{SU}(2)$ соответствуют в точности специальные унитарные матрицы 2×2 (т.е. унитарные матрицы с определителем 1).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определитель матрицы равен квадрату нормы соответствующего кватерниона. Остаётся проверить условие унитарности. Пусть $A = \begin{pmatrix} z & w \\ x & y \end{pmatrix}$, причём $\det A =$

1. Тогда $A^{-1} = \begin{pmatrix} y & -w \\ -x & z \end{pmatrix}$. Условие унитарности $A^{-1} = A^*$ тогда равносильно равенству

$$\begin{pmatrix} y & -w \\ -x & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{z} & \bar{x} \\ \bar{w} & \bar{y} \end{pmatrix},$$

т.е. равенствам $x = -\bar{w}$, $y = \bar{z}$. Это и значит, что матрица A соответствует некоторому кватерниону. $\square$

Кстати, отметим, что если $z \in SU(2)$, то $z^{-1} = \bar{z}$.

Рассмотрим теперь множество *чисто мнимых кватернионов* $\mathfrak{J} = \{bi + cj + dk\} = \{z \in \mathbb{H} \mid z + \bar{z} = 0\}$. Оно является трёхмерным евклидовым пространством (скалярное произведение (v, w) строится по норме). Кроме того, на трёхмерном евклидовом пространстве есть антисимметричная операция векторного произведения $[v, w]$.

$\mathfrak{J}$ не замкнуто относительно умножения: произведение двух чисто мнимых кватернионов не обязано быть чисто мнимым. Но оказывается, что кватернионное умножение “знает” и про скалярное, и про векторное произведение на $\mathfrak{J}$. А именно, если $v, w \in \mathfrak{J}$, то их произведение в $\mathbb{H}$ равняется

$$v \cdot w = -(v, w) + [v, w],$$

где первое слагаемое — это вещественное число, а второе — вектор, т.е. элемент $\mathfrak{J}$.

УПРАЖНЕНИЕ 31.5. Проверьте это равенство.

В частности, если $v \in \mathfrak{J}$, то $[v, v] = 0$, а значит, $v^2 = -|v|^2$. Получается, что квадрат всякого чисто мнимого кватерниона есть отрицательное число. В частности, всякий чисто мнимый кватернион единичного модуля является квадратным корнем из -1 .

31.3. Действие $SU(2)$ на $\mathfrak{J}$. Наша цель — сопоставить каждому кватерниону $z \in SU(2)$ вращение евклидова трёхмерного пространства $R_z: \mathfrak{J} \rightarrow \mathfrak{J}$.

Во-первых, заметим, что для фиксированного кватерниона $z \in SU(2)$ отображения $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, заданные формулами $q \mapsto zq$ и $q \mapsto qz^{-1}$ суть ортогональные преобразования, т.к. они сохраняют норму. Однако ни одно из них не определяет действие на подпространстве $\mathfrak{J}$. Для того, чтобы $\mathfrak{J}$ переходило бы в себя, на нём можно действовать *композицией* этих преобразований, т.е. сопряжениями.

ЛЕММА 31.6. Пусть $z \in SU(2)$. Отображение $q \mapsto zqz^{-1}$ переводит чисто мнимые кватернионы в чисто мнимые.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $q \in \mathfrak{J}$. Это значит, что $q + \bar{q} = 0$. Докажем, что $zqz^{-1} + \overline{(zqz^{-1})} = 0$. Действительно,

$$zqz^{-1} + \overline{(zqz^{-1})} = zqz^{-1} + \overline{z^{-1}} \bar{q} \bar{z} = zqz^{-1} + z\bar{q}z^{-1} = z(q + \bar{q})z^{-1} = 0.$$

$\square$

Поскольку левое и правое умножение задают ортогональные преобразования, получаем, что отображение $R_z: q \mapsto zqz^{-1}$ есть ортогональное преобразование пространства $\mathbb{R}^3 = \mathfrak{J}$.

ЛЕММА 31.7. Отображение $z \mapsto R_z$ задаёт гомоморфизм групп $SU(2) \rightarrow O(3)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы доказали, что преобразование R_z ортогонально. Необходимо лишь проверить, что это отображение — гомоморфизм. Проверим, что $R_z R_w = R_{zw}$. Это несложно:

$$R_z(R_w(q)) = R_z(wqw^{-1}) = zwqw^{-1}z^{-1} = zwq(zw)^{-1} = R_{zw}(q).$$

$\square$

Далее мы покажем, что образ этого гомоморфизма есть в точности групп *специальных* ортогональных матриц $SO(3)$. По теореме Эйлера, каждое специальное ортогональное преобразование $\mathbb{R}^3$ есть вращение. Вращение задаётся двумя параметрами: направлением оси и углом вращения. Мы увидим, как узнать эти параметры для преобразования R_z , зная кватернион $z \in SU(2)$.

Пусть $z = a + bi + cj + dk = a + v' \in SU(2)$, где a и v' — вещественная и мнимая части кватерниона z . Тогда $|z|^2 = a^2 + |v'|^2 = 1$. Поэтому существует такой угол $\varphi \in [0, \pi]$, что $a = \cos \varphi$, $|v'| = \sin \varphi$. По причинам, которые станут понятны позже, сделаем замену переменной: положим $\varphi = \theta/2$, где $\theta \in [0, 2\pi]$. Тогда

$$z = \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \cdot v,$$

где $v = v'/\sin(\theta/2)$ — вектор длины 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 31.8. Пусть $z = \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2) \cdot v \in SU(2)$. Преобразование $R_z: \mathfrak{J} \rightarrow \mathfrak{J}$, $q \mapsto zqz^{-1}$ есть поворот относительно оси, натянутой на вектор v , на угол θ .

ЗАМЕЧАНИЕ 31.9. Теперь понятно, зачем надо было полагать $\varphi = \theta/2$!

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сперва докажем, что R_z оставляет вектор v на месте. Это проверяется прямым вычислением. Если $z = \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2) \cdot v$, то $z^{-1} = z = \cos(\theta/2) - \sin(\theta/2) \cdot v$. Тогда

$$\begin{aligned} z v z^{-1} &= (\cos(\theta/2) + \sin(\theta/2) \cdot v) v (\cos(\theta/2) - \sin(\theta/2) \cdot v) = \\ &= (\cos(\theta/2) v - \sin(\theta/2) (v, v)) (\cos(\theta/2) - \sin(\theta/2) \cdot v) = \\ &= \cos^2(\theta/2) \cdot v + \sin^2(\theta/2) \cdot v = v. \end{aligned}$$

(мы пользовались тем, что $(v, v) = 1$ и $[v, v] = 0$).

Значит, v остаётся на месте под действием R_z .

Далее, проверим, что R_z задаёт поворот на угол θ в плоскости, ортогональной вектору v . Выберем в этой плоскости ортогональный базис: пусть w — произвольный единичный вектор, ортогональный v , а $u = [v, w]$. Применим R_z к w .

УПРАЖНЕНИЕ 31.10. Проверьте, что $R_z(w) = \cos \theta w + \sin \theta u$.

Таким образом, в плоскости $\langle w, u \rangle$ преобразование R_z действует поворотами на угол θ . Это завершает доказательство предложения. $\square$

Значит, R_z отвечает вращению, и всякое вращение можно получить таким образом. Мы получили следующее предложение:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 31.11. Имеется сюръективный гомоморфизм групп $SU(2) \rightarrow SO(3)$.

Выясним, чему равно ядро этого гомоморфизма. Кватернион $z = \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2) \cdot v$ отвечает тождественному преобразованию, когда угол θ равен $2\pi n$, т.е. $\theta/2 \in \{0, \pi\}$. Значит, $\sin(\theta/2) = 0$, а $\cos(\theta/2) = \pm 1$. Таким образом, $z = \pm 1$.

Поэтому предыдущее предложение можно уточнить:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 31.12. Имеется изоморфизм групп $SU(2)/\pm 1 \rightarrow SO(3)$.

С топологической точки зрения этот изоморфизм отвечает двулистному накрытию $S^3 \rightarrow \mathbb{RP}^3$ трёхмерной проективной плоскости трёхмерной сферой.

E-mail address: esmirnov@hse.ru