

30. Тридцатая лекция, 6 июня 2019 г.

30.1. Унитарные операторы. Понятие унитарного оператора в эрмитовом пространстве является аналогом понятия ортогонального оператора в евклидовом пространстве.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 30.1. Оператор $\mathcal{A}$ называется *унитарным*, если он сохраняет норму вектора: $\|\mathcal{A}v\| = \|v\|$ для любого $v \in V$.

ЗАМЕЧАНИЕ 30.2. Оператор унитарен тогда и только тогда, когда он сохраняет скалярное произведение:

$$(\mathcal{A}v, \mathcal{A}w) = (v, w) \quad \forall v, w \in V.$$

Действительно, импликация «только тогда» очевидна, а «тогда» следует из того, что скалярное произведение можно восстановить по норме.

Кроме того, унитарные операторы всегда невырождены, т.к. они не имеют ядра (в противном случае мы получили бы, что $\|\mathcal{A}v\| = 0$ при ненулевом векторе $v \in \text{Ker } \mathcal{A}$). Далее, произведение двух унитарных операторов и обратный к унитарному оператору снова унитарны. Поэтому унитарные операторы образуют группу, которая обозначается через $U(V)$ и называется *унитарной группой*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 30.3. Унитарные операторы — это в точности операторы, удовлетворяющие условию $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u, v \in V$ — произвольные векторы. Тогда

$$(u, v) = (\mathcal{A}u, \mathcal{A}v) = (\mathcal{A}^* \mathcal{A}u, v).$$

Поэтому $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{E}$, что равносильно тому, что $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^*$. $\square$

Множество матриц, удовлетворяющих условию $A^{-1} = A^*$, образует подгруппу в $GL_n(\mathbb{C})$, которая обозначается через $U(n)$ и тоже называется *унитарной группой*.

УПРАЖНЕНИЕ 30.4 (для тех, кто знает, что такое гладкое многообразие). Докажите, что $U(n)$ является *вещественным* гладким многообразием размерности n^2 в $2n^2$ -мерном пространстве $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$.

ПРИМЕР 30.5. Группа $U(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid z^{-1} = \bar{z}\}$ есть единичная окружность в $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$.

ПРИМЕР 30.6. Группа $SU(2)$ состоит из матриц $\begin{pmatrix} z & w \\ x & y \end{pmatrix}$ с единичным определителем ($zy - xw = 1$), для которых обратная совпадает с сопряженной, то есть

$$\begin{pmatrix} y & -w \\ -x & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{z} & \bar{x} \\ \bar{w} & \bar{y} \end{pmatrix}.$$

Это дает нам уравнения $y = \bar{z}$, $x = -\bar{w}$, то есть

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \mid z\bar{z} + w\bar{w} = 1 \right\}.$$

30.2. Диагонализуемость и собственные значения.

ТЕОРЕМА 30.7. Пусть $\mathcal{A}$ — оператор одного из трех типов: эрмитов, косоэрмитов или унитарный. Тогда

- (1) Если подпространство $U \subset V$ является $\mathcal{A}$ -инвариантным, то $U^\perp$ тоже $\mathcal{A}$ -инвариантно.
- (2) Оператор $\mathcal{A}$ диагонализуем в ортонормированном базисе.
- (3) Если $\mathcal{A}$ эрмитов (соотв. косоэрмитов, унитарен), то все его собственные значения вещественны (соотв. чисто мнимые, равны по модулю 1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) доказывается примерно одинаково во всех трех случаях. Проведем самое сложное из трех рассуждений, для унитарного оператора $\mathcal{A}$.

Итак, докажем, что $\mathcal{A}U^\perp \subset U^\perp$. Возьмем произвольный вектор $w \in U^\perp$ и докажем, что $\mathcal{A}w \in U^\perp$, то есть что $(\mathcal{A}w, u) = 0$ для любого $u \in U$. Оператор $\mathcal{A}$, ограниченный на U , также будет унитарным, а следовательно, невырожденным. Стало быть, вектор $\tilde{u} = \mathcal{A}u \in U$ отличен от нуля. Векторы $\tilde{u}$ и w ортогональны. Поэтому

$$0 = (w, \tilde{u}) = (\mathcal{A}w, \mathcal{A}\tilde{u}) = (\mathcal{A}w, \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}u) = (\mathcal{A}w, u).$$

(во втором равенстве мы воспользовались ортогональностью $\mathcal{A}$). Поэтому $\mathcal{A}w \in U^\perp$, что и требовалось доказать. Случай эрмитова и косоэрмитова операторов разбираются аналогично (проделайте это сами).

(2) доказывается по индукции. При $\dim V = 1$ доказывать нечего. Докажем индуктивный переход: пусть $\dim V = n$. Поскольку $\mathcal{A}$ — оператор на комплексном векторном пространстве, у него есть собственный вектор $v \in V$. Будем считать, что $\|v\| = 1$. Тогда подпространство $U = \langle v \rangle^\perp$ тоже $\mathcal{A}$ -инвариантно в силу пункта (1). Поэтому, согласно предположению индукции, в U существует ортонормированный базис $u_1, \dots, u_{n-1}$, в котором $\mathcal{A}$ диагонален. Но тогда $\mathcal{A}$ диагонален в базисе $u_1, \dots, u_{n-1}, v$ пространства V .

Докажем (3) это для эрмитова оператора. Пусть $\mathcal{A}v = \lambda v$. Тогда $\lambda(v, v) = (v, \lambda v = (v, \mathcal{A}v) = (\mathcal{A}v, v) = (\lambda v, v) = \bar{\lambda}(v, v)$, откуда $\lambda = \bar{\lambda} \in \mathbb{R}$. Случаи унитарного и косоэрмитова операторов разбираются аналогично. $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 30.8. Будем называть линейный оператор $\mathcal{A}$ *нормальным*, если он коммутирует со своим сопряженным: $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$. Ясно, что эрмитовы, косоэрмитовы и унитарные операторы являются нормальными. Докажите, что нормальный оператор диагоналізуем в ортонормированном базисе.

30.3. Полярное разложение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 30.9. Эрмитов оператор $\mathcal{A}$ называется *положительно определенным*, если все его собственные значения больше нуля.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 30.10 (об извлечении корня из положительно определенного эрмитова оператора). Пусть $\mathcal{A}$ — положительно определенный эрмитов оператор. Тогда существует единственный положительно определенный эрмитов оператор $\mathcal{B}$, для которого $\mathcal{A} = \mathcal{B}^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование: пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ — различные собственные значения $\mathcal{A}$, $V_1, \dots, V_k$ — соответствующие им собственные подпространства (т.е. $\mathcal{A}|_{V_i} = \lambda_i \mathcal{E}$). Пусть $\mu_i = \sqrt{\lambda_i} > 0$. Определим оператор $\mathcal{B}$, действующий на каждом из V_i умножением на μ_i . Ясно, что $\mathcal{B}^2 = \mathcal{A}$.

Докажем единственность. Пусть $\mathcal{B}$ — искомый оператор. Он диагоналізуем; пусть W_i — его собственные подпространства, отвечающие собственным значениям μ_i . Тогда пространства W_i будут собственными и для оператора $\mathcal{A} = \mathcal{B}^2$, который будет действовать на каждом из W_i умножением на μ_i^2 . Отсюда следует, что набор W_i получается из набора V_i подходящей перенумерацией, т.е. $\mathcal{B}$ определен однозначно. $\square$

ЛЕММА 30.11. Пусть $\mathcal{A}$ — произвольный невырожденный оператор. Тогда оператор $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ — положительно определенный эрмитов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эрмитовость очевидна: $(\mathcal{A}\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}^{**}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}\mathcal{A}^*$. Для доказательства положительной определенности заметим, что если $v \in V$ — собственный вектор $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$, отвечающий собственному значению $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lambda = (\lambda v, v)/(v, v) = (\mathcal{A}\mathcal{A}^*v, v)/(v, v) = (\mathcal{A}^*v, \mathcal{A}^*v)/(v, v) = \|\mathcal{A}^*v\|^2/\|v\|^2 > 0.$$

$\square$

Сформулируем и докажем теорему о полярном разложении оператора, которая является аналогом представления комплексного числа в тригонометрической форме: $z = re^{i\varphi}$, где $r > 0$, $e^{i\varphi} = 1$.

ТЕОРЕМА 30.12 (о полярном разложении). *Всякий невырожденный линейный оператор $\mathcal{A}$ можно представить в виде $\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{C}$, где $\mathcal{B}$ — положительно определенный эрмитов оператор, $\mathcal{C}$ — унитарный оператор, причем это представление единственно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем единственность: что если такое представление существует, то $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ определены однозначно. Итак, пусть $\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{C}$, где $\mathcal{B} = \mathcal{B}^*$, а $\mathcal{C}\mathcal{C}^* = \mathcal{E}$. Тогда по предыдущей лемме оператор $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{B}\mathcal{C}\mathcal{C}^*\mathcal{B}^* = \mathcal{B}\mathcal{B}^* = \mathcal{B}^2$ — положительно определенный эрмитов. Значит, из него в силу предложения 30.10 единственным образом извлекается корень, т.е. оператор $\mathcal{B}$ определен однозначно. Но тогда и $\mathcal{C}$ определен однозначно, т.к. $\mathcal{C} = \mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}$.

Докажем существование. Рассмотрим положительно определенный эрмитов оператор $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$. Из него извлекается корень: пусть $\mathcal{B}$ таков, что $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{B}^2$. Тогда положим $\mathcal{C} = \mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}$. Тогда $\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{C}$, а $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{B}\mathcal{C}\mathcal{C}^*\mathcal{B} = \mathcal{B}^2$, откуда $\mathcal{C}\mathcal{C}^* = \mathcal{E}$. Стало быть, $\mathcal{C}$ унитарен. Теорема доказана. $\square$