

29. Двадцать девятая лекция, 4 июня 2019 г.

В этой лекции через V будет обозначаться n -мерное *эрмитово* пространство, т.е. комплексное векторное пространство, на котором задана положительно определенная эрмитова форма $(\cdot, \cdot)$.

Поляризация. Как и в евклидовом случае, по норме на эрмитовом пространстве V можно восстановить скалярное произведение. Действительно, из равенств

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2 \operatorname{Re}(v, w) \text{ и } \|v + iw\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2i \operatorname{Im}(v, w)$$

следует, что

$$(v, w) = \frac{1}{2} [\|v + w\|^2 - \|v + iw\|^2 - (1 + i)(\|v\|^2 + \|w\|^2)]$$

(проверьте это!).

29.1. Соответствие между V и V^* . С помощью формы $(\cdot, \cdot)$ можно задать изоморфизм между пространством V и двойственным к нему V^* . А именно, при этом изоморфизме вектор v будет переходить в линейный функционал ξ_v , заданный по правилу:

$$\xi_v(w) := (v, w) \in \mathbb{C}$$

Этот функционал действительно будет линейным, поскольку форма $(\cdot, \cdot)$ линейна по второму аргументу.

Мы получили отображение из V в V^* . Оно будет изоморфизмом *вещественных* векторных пространств; однако оно будет *антилинейно* по отношению к умножению на комплексные числа:

$$\lambda \cdot v \mapsto \xi_{\lambda v} = \bar{\lambda} \cdot \xi_v.$$

29.2. Соответствие между полуторалинейными формами и линейными операторами. Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор на V . Он задает на V полуторалинейную форму $\varphi_{\mathcal{A}}(v, w)$ по правилу:

$$\varphi_{\mathcal{A}}(v, w) := (v, \mathcal{A}w).$$

Заметим, что, хотя форма $(\cdot, \cdot)$ была эрмитовой, про форму $\varphi_{\mathcal{A}}$ этого утверждать нельзя: она, вообще говоря, эрмитовой не будет.

Пусть $\{e_1, \dots, e_n\}$ — *ортонормированный* базис пространства V . Тогда матрица формы $\varphi_{\mathcal{A}}$ в этом базисе выглядит так же, как матрица $A = (a_{ij})$ оператора $\mathcal{A}$. Действительно,

$$\varphi_{\mathcal{A}}(e_i, e_j) = (e_i, \mathcal{A}e_j) = (e_i, \sum_k a_{kj} e_k) = a_{ij}.$$

Определим на пространстве полуторалинейных форм инволюцию (т.е. отображение, квадрат которого равен тождественному) по правилу:

$$\varphi(v, w) \mapsto \overline{\varphi(w, v)}.$$

(за счет сопряжения полученная форма снова будет полулинейна по первому аргументу и линейна по второму). Неподвижные точки этой инволюции — это в точности эрмитовы формы.

Поскольку формы можно отождествить с линейными операторами, мы получаем инволюцию на пространстве линейных операторов, называемую *сопряжением*: $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}^*$. Согласно вышесказанному, сопряженный к $\mathcal{A}$ оператор — это оператор $\mathcal{A}^*$, удовлетворяющий равенству

$$(\mathcal{A}^* v, w) = (v, \mathcal{A} w) \quad \forall v, w \in V.$$

Матрица $\mathcal{A}^*$ получается из матрицы $\mathcal{A}$ композицией транспонирования и комплексного сопряжения: $A^* = \overline{A^t}$.

29.3. Эрмитовы и косоэрмитовы операторы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 29.1. Оператор $\mathcal{A}$ называется *эрмитовым* (соотв. *косоэрмитовым*), если $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ (соотв. $\mathcal{A} = -\mathcal{A}^*$).

Эрмитовы и косоэрмитовы операторы иногда еще называют *самосопряженными* и *антисамосопряженными*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 29.2. Эрмитовы и косоэрмитовы операторы образуют вещественные векторные пространства (обозначим их $\text{Herm}(V)$ и $\text{SkewHerm}(V)$). Пространство $\text{End}(V)$ есть прямая сумма этих двух подпространств (т.е. всякий оператор есть сумма эрмитова и косоэрмитова). Размерности (вещественные!) этих подпространств равны n^2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых, ясно, что сумма двух (косо)эрмитовых операторов снова (косо)эрмитова, а при умножении на вещественный (но не комплексный!) скаляр (косо)эрмитов оператор снова остается таковым. Далее, если оператор одновременно эрмитов и косоэрмитов, то он нулевой, т.к. $\mathcal{A} = \mathcal{A}^* = -\mathcal{A}^*$. Поэтому эрмитовы и косоэрмитовы операторы образуют вещественные подпространства, пересекающиеся лишь по нулю.

Далее, пусть $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$ — произвольный оператор. Тогда операторы $\frac{1}{2}(\mathcal{A} + \mathcal{A}^*)$ и $\frac{1}{2}(\mathcal{A} - \mathcal{A}^*)$ будут эрмитовым и косоэрмитовым соответственно, а их сумма равна $\mathcal{A}$. Стало быть, $\text{End}(V) = \text{Herm}(V) \oplus \text{SkewHerm}(V)$. Наконец, отображение $\mathcal{A} \mapsto i\mathcal{A}$ переводит эрмитовы операторы в косоэрмитовы и наоборот, задавая изоморфизм между (вещественными!) векторными пространствами $\text{Herm}(V)$ и $\text{SkewHerm}(V)$. Поэтому размерность каждого из них равна $\frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} \text{End}(V)$, т.е. n^2 . $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 29.3. Про разложение оператора в сумму эрмитова и косоэрмитова можно думать как про обобщение разложения комплексного числа в сумму вещественного и чисто мнимого (а в случае $\dim V = 1$ это в точности одно и то же).