

28. Двадцать восьмая лекция, 30 мая 2019 г

28.1. Эрмитово пространство. ² Ранее мы уже имели дело с евклидовыми пространствами. Если на вещественном векторном пространстве задана положительно определенная симметрическая билинейная форма, то при помощи такой формы можно задать норму на V по правилу $\|v\| = (v, v)^{1/2}$ и измерять длины векторов, углы между ними и т.д.

Если же пространство V комплексное, то, как легко видеть, на V не бывает положительно определенных билинейных форм. Действительно, пусть задана такая форма, для которой $(v, v) > 0$ при $v \neq 0$. Тогда $(iv, iv) = i^2(v, v) = -(v, v) < 0$ — противоречие. Поэтому для введения нормы на комплексном векторном пространстве применяются *полуторалинейные* формы.

28.2. Полуторалинейные формы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 28.1. Пусть V — комплексное векторное пространство. Отображение $\alpha: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ называется *полуторалинейной формой* на V , если:

- оно линейно по второму аргументу: $\alpha(v, w + w') = \alpha(v, w) + \alpha(v, w')$; $\alpha(v, \lambda w) = \lambda \cdot \alpha(v, w)$;
- оно *антилинейно* по первому аргументу: $\alpha(v + v', w) = \alpha(v', w) + \alpha(v, w)$; $\alpha(\lambda v, w) = \bar{\lambda} \cdot \alpha(v, w)$.

В конечномерном случае полуторалинейную форму можно задать матрицей: пусть $e_1, \dots, e_n$ — некоторый базис пространства V . Пусть $A = (a_{ij})$, где $a_{ij} = \alpha(e_i, e_j)$. Тогда если $v = \sum x_i e_i$, $w = \sum y_j e_j$, то

$$\alpha(v, w) = \sum_{i,j} a_{ij} \bar{x}_i y_j.$$

28.3. Эрмитовы формы. Наша следующая задача — выяснить, что будет аналогом *симметрической* билинейной формы. Ее определение тоже оказывается нужно “подправить”. Так, например, у полуторалинейной формы нельзя просто поменять местами аргументы: по нашему определению форма $\tilde{\alpha}(v, w) := \alpha(w, v)$ уже не будет полуторалинейной формой, т.к. она будет линейна по *первому* аргументу и антилинейна по *второму*. Чтобы получить полуторалинейную форму, результат надо еще сопрячь.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 28.2. Полуторалинейная форма называется *эрмитовой*, если $\alpha(v, w) = \overline{\alpha(w, v)}$.

Отсюда, в частности, следует, что для эрмитовой формы $\alpha(v, v) = \overline{\alpha(v, v)} \in \mathbb{R}$. А вещественные числа уже бывают положительными или отрицательными. Поэтому возникает следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 28.3. Эрмитова форма α называется *положительно определенной*, если $\alpha(v, v) > 0$ при $v \neq 0$. Пространство, снабженное положительно определенной эрмитовой формой, называется *эрмитовым* (или *унитарным*).

ПРИМЕР 28.4. На $\mathbb{C}^n$ существует каноническая положительно определенная эрмитова форма

$$(x, y) = \bar{x}_1 y_1 + \dots + \bar{x}_n y_n.$$

ПРИМЕР 28.5. Рассмотрим пространство интегрируемых *комплекснозначных* функций на отрезке $[0, 1]$ (или каком-нибудь еще множестве). На этом пространстве существует положительно определенная эрмитова форма, определенная по правилу

$$(f, g) = \int_0^1 \overline{f(x)} g(x) dx.$$

²Первая половина двадцать восьмой лекции была посвящена симметрическим и кососимметрическим тензорам. Эта часть (будет) включена в записки двадцать седьмой лекции. Здесь только вторая половина лекции, про эрмитовы пространства.

УПРАЖНЕНИЕ 28.6. Проверьте, что в эрмитовом случае из любого базиса можно сделать ортонормированный при помощи верхнетреугольной замены (ортогонализация Грама–Шмидта).

28.4. Норма на эрмитовом пространстве. Пусть V — эрмитово пространство. Введем на V норму по правилу $\|v\| = (v, v)^{1/2} \in \mathbb{R}_+$.

УПРАЖНЕНИЕ 28.7. Докажите, что это действительно норма (в частности, для нее имеет место неравенство Коши–Буняковского–Шварца).