

Программа экзамена 21-24 июня 2019 г.

На коллоквиуме вам будет предложен билет, включающий один–два теоретических вопроса из перечисленных и одну–две задачи. Также экзаменатор может на своё усмотрение задавать вам дополнительные вопросы по всей программе, включающие в себя в числе прочего проверку знания и понимания основных определений и конструкций, изложенных в курсе.

Теоретические вопросы

1. Докажите, что подгруппа свободной группы свободна, и ранг подгруппы не превосходит ранга группы.
2. Докажите теорему о взаимных базисах для свободных абелевых групп.
3. Докажите теорему о существовании примарного разложения конечнопорожденной абелевой группы.
4. Докажите теорему о единственности примарного разложения конечнопорожденной абелевой группы.
5. Найдите группу автоморфизмов группы $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
6. Докажите формулу Бернсайда для числа орбит действия группы.
7. Докажите, что коммутант есть наименьшая нормальная подгруппа, фактор по которой абелев.
8. Вычислите коммутанты групп S_n и A_n .
9. Докажите порождённость группы $SL_n(K)$ трансвекциями (т.е. элементами вида $E + E_{ij}$), и найдите ее коммутант.
10. Докажите, что группа разрешима тогда и только тогда, когда её нормальная подгруппа и факторгруппа разрешимы.
11. Докажите нетривиальность центра p -группы.
12. Докажите разрешимость p -группы и коммутативность группы порядка p^2 .
13. Докажите первую теорему Силова.
14. Докажите вторую теорему Силова.
15. Докажите третью теорему Силова.
16. Докажите простоту группы A_5 (любым известным вам способом).
17. Докажите, что всякое кольцо главных идеалов факториально.
18. Докажите, что идеал максимален (соотв. прост) тогда и только тогда, когда факторкольцо по нему является полем (соотв. областью целостности).
19. Докажите, что всякий простой идеал в кольце главных идеалов максимален.
20. Докажите, что подмодуль свободного модуля над кольцом главных идеалов — свободный модуль, ранг которого не превосходит ранг исходного модуля.
21. Докажите единственность разложения конечнопорожденного модуля над кольцом главных идеалов в прямую сумму свободного и примарных циклических.
22. Выведите теорему о фробениусовой нормальной форме из теоремы о структуре конечнопорожденных модулей над кольцом главных идеалов.
23. Выведите теорему о жордановой нормальной форме из теоремы о структуре конечнопорожденных модулей над кольцом главных идеалов.

24. Докажите теорему Гамильтона–Кэли (любым известным вам способом).
25. Докажите существование выражения симметрического многочлена через элементарные симметрические.
26. Докажите единственность выражения симметрического многочлена через элементарные симметрические.
27. Докажите лемму Гаусса: если многочлен неприводим над факториальным кольцом A , то он неприводим и над $\text{Quot } A$.
28. Докажите факториальность кольца многочленов над факториальным кольцом (леммой Гаусса можно пользоваться без доказательства).
29. Докажите теорему Гильберта о базисе идеала.
30. Докажите теорему Гильберта об инвариантах (для конечной группы).
31. Дайте определение результанта пары многочленов через корни и через определитель матрицы Сильвестра. Докажите эквивалентность этих определений.
32. Дайте определение тензорного произведения линейных операторов. Найдите его матричные элементы, зная матричные элементы исходных операторов.
33. Дайте определение тензорного произведения векторных пространств (можно ограничиться конечномерным случаем). Докажите универсальное свойство тензорного произведения.
34. Дайте определение свертки тензоров. Выразите через свертку след оператора, действие оператора на вектор, композицию операторов.
35. Дайте определение эрмитова пространства. Докажите, что эрмитово скалярное произведение восстанавливается по норме.
36. Дайте определение сопряженного оператора в эрмитовом пространстве. Покажите, что пространство полуторалинейных форм изоморфно пространству линейных операторов. Опишите эрмитовы и косоэрмитовы формы в терминах сопряженного оператора.
37. Докажите диагонализуемость эрмитова оператора в ортонормированном базисе и покажите, что его собственные значения вещественны.
38. Докажите диагонализуемость унитарного оператора в ортонормированном базисе и покажите, что его собственные значения имеют модуль 1.
39. Докажите существование и единственность решения уравнения $\mathcal{A}^2 = \mathcal{C}$, где $\mathcal{C}$ — эрмитов оператор с положительными собственными значениями.
40. Докажите существование и единственность полярного разложения для невырожденного оператора над $\mathbb{C}$.
41. Дайте определение алгебры кватернионов $\mathbb{H}$ и покажите, что она является алгеброй с делением.
42. Докажите изоморфизм $SU(2)/\{\pm E\} \cong SO(3)$.