

22. Двадцать вторая лекция, 30 апреля 2019 г.

22.1. Полилинейные отображения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22.1. Пусть $V_1, \dots, V_k, W$ — векторные пространства (над некоторым полем $\mathbb{K}$, которое мы фиксируем по крайней мере до конца следующей лекции). Отображение

$$\varphi: V_1 \times \dots \times V_k \rightarrow W$$

называется *полилинейным*, если оно линейно по каждому из аргументов:

$$\varphi(\dots, \lambda v_i + \mu v'_i, \dots) = \lambda \varphi(\dots, v_i, \dots) + \mu \varphi(\dots, v'_i, \dots).$$

ПРИМЕР 22.2. 1-линейные отображения — это обычные линейные отображения $\varphi: V_1 \rightarrow W$. Если $W = \mathbb{K}$, то 1-линейные отображения — это линейные функционалы на V_1 , а 2-линейные отображения — это билинейные формы.

Полилинейные отображения можно складывать и умножать на элементы поля $\mathbb{K}$. Поэтому они образуют векторное пространство. Будем обозначать его через $\text{Hom}(V_1, \dots, V_k; W)$. Несложно найти его размерность:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 22.3. Пусть $\dim V_i = d_i$, $\dim W = d$. Тогда

$$\dim \text{Hom}(V_1, \dots, V_k; W) = d_1 \dots d_k \cdot d.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем базисы в наших векторных пространствах: пусть $e_1^{(i)}, \dots, e_{d_i}^{(i)}$ — базис в V_i , $e_1, \dots, e_d$ — базис в W . В силу полилинейности отображение φ однозначно определяется своими значениями на всевозможных наборах базисных векторов $\varphi(e_{\alpha_1}^{(1)}, \dots, e_{\alpha_k}^{(k)})$; если $v_i = \sum x_{\alpha_i}^{(i)} e_{\alpha_i}^{(i)}$, то

$$\varphi(v_1, \dots, v_k) = \sum_{1 \leq \alpha_i \leq d_i} x_{\alpha_1}^{(1)} \dots x_{\alpha_k}^{(k)} \varphi(e_{\alpha_1}^{(1)}, \dots, e_{\alpha_k}^{(k)}).$$

Разложив каждый из векторов $\varphi(e_{\alpha_1}^{(1)}, \dots, e_{\alpha_k}^{(k)})$ по базису $e_1, \dots, e_d$ пространства W , получим $(k+1)$ -мерную матрицу размера $d_1 \times \dots \times d_k \times d$, однозначно определяющую отображение φ .

Предъявим базис пространства $\text{Hom}(V_1, \dots, V_k; W)$. Его образуют, например, следующие отображения:

$$\delta_{(i_1, \dots, i_k)}^j: (e_{\alpha_1}^{(1)}, \dots, e_{\alpha_k}^{(k)}) \mapsto \begin{cases} e_j, & \text{если } (i_1, \dots, i_k) = (\alpha_1, \dots, \alpha_k); \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Здесь $1 \leq j \leq d$, $1 \leq i_r \leq d_r$. □

22.2. Тензорное произведение. Пусть V, W — векторные пространства с базисами $\{e_i \mid i \in I\}$ и $\{f_j \mid j \in J\}$ соответственно (вообще говоря, не предполагается, что множества I и J конечны).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 22.4. Следующие свойства билинейного отображения $\varphi: V \times W \rightarrow U$ эквивалентны:

- (1) $\varphi(e_i, f_j)$ составляют базис в U ;
- (2) для любого $u \in U$ существует единственное представление $u = \sum_{i \in I} \varphi(e_i, w_i)$, где $w_i \in W$;
- (3) для любого $u \in U$ существует единственное представление $u = \sum_{j \in J} \varphi(v_j, f_j)$, где $v_j \in V$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что (1) эквивалентно (2). Действительно, если $u = \sum_{i \in I, j \in J} x_{ij} \varphi(e_i, f_j)$, то $u = \sum_{i \in I} \varphi(e_i, w_i)$, где $w_i = \sum_{j \in J} x_{ij} f_j$ (здесь мы пользуемся линейностью φ по второму аргументу). Аналогично доказывается, что (1) эквивалентно (3). □

СЛЕДСТВИЕ 22.5. Выполнение условия (1) не зависит от выбора базисов в V и W .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, условие (1) эквивалентно условию (3), которое никак не использует выбор базиса в V . По тем же причинам (1) не зависит от выбора базиса в W . $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22.6. *Тензорное произведение* пространств V и W — это векторное пространство T вместе с билинейным отображением

$$\otimes: V \times W \rightarrow T,$$

удовлетворяющим условию: если $\{e_i \mid i \in I\}$ и $\{f_j \mid j \in J\}$ — базисы в V и W соответственно, то $\{e_i \otimes f_j\}$ — базис в T . Элементы тензорного пространства принято называть *тензорами*.

В силу предыдущего следствия выполнение последнего условия не зависит от выбора базисов в V и W .

Очевидно, что для любых V и W такие билинейное отображение и пространство T существуют: достаточно взять в качестве T пространство, порождённое базисными элементами t_{ij} , где $i \in I$, $j \in J$, и определить отображение по правилу $e_i \otimes f_j \mapsto t_{ij}$. Кроме того, легко убедиться в его единственности:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 22.7. *Пространство T и отображение $\otimes$ заданы однозначно в следующем смысле: если $(T_1, \otimes_1)$ и $(T_2, \otimes_2)$ — два тензорных произведения пространств V и W , то существует единственный изоморфизм*

$$\psi: T_1 \rightarrow T_2, \quad \psi(v \otimes_1 w) = v \otimes_2 w \quad \forall v \in V, w \in W.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Искомый изоморфизм задаётся на базисных элементах по правилу $\psi(e_i \otimes_1 f_j) = e_i \otimes_2 f_j$. $\square$

Итак, пространство T и отображение $\otimes$ определены однозначно по V и W . Будем обозначать T через $V \otimes W$. Из явного описания базиса в $V \otimes W$ немедленно следует такое

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 22.8. *Если V и W конечномерны, то $\dim V \otimes W = \dim V \cdot \dim W$.*

Следующий пример показывает, как обстоит дело в случае счётномерных пространств.

ПРИМЕР 22.9. Пусть $V = \mathbb{K}[x]$, $W = \mathbb{K}[y]$. Тогда $\mathbb{K}[x] \otimes \mathbb{K}[y] \cong \mathbb{K}[x, y]$.

Действительно, изоморфизм строится по правилу: $f(x) \otimes g(y) \mapsto f(x)g(y)$. $\mathbb{K}[x, y]$ действительно будет тензорным произведением $\mathbb{K}[x]$ и $\mathbb{K}[y]$, т.к. множество образов пар базисных векторов (x^m, y^n) образует базис $\{x^m y^n\}$ в $\mathbb{K}[x, y]$.

23. Двадцать третья лекция, 30 апреля 2019 г.

23.1. Универсальное свойство. Оказывается, что $V \otimes W$ является в каком-то смысле «самым главным» из пространств, которые могут быть образами билинейных отображений из $V \times W$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 23.1 (универсальное свойство тензорного произведения). *Для любого билинейного отображения $\varphi: V \times W \rightarrow U$ существует единственное линейное отображение $F: V \otimes W \rightarrow U$, для которого $\varphi(v, w) = F(v \otimes w)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Искомое отображение задаётся на базисных элементах пространства $V \otimes W$:

$$F(e_i \otimes f_j) := \varphi(e_i, f_j).$$

$\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 23.2. Можно (и в каком-то смысле даже более правильно) принять универсальное свойство за определение $V \otimes W$ и после этого доказать существование пространства и отображения, определяемого универсальным свойством.

ЗАМЕЧАНИЕ 23.3. Любители теории категорий скажут, что тензорное произведение $V \otimes W$ является *начальным* (или *отталкивающим*) объектом в категории таких векторных пространств U , для которых имеется билинейное отображение $V \times W \rightarrow U$.

УПРАЖНЕНИЕ 23.4. Выведите из универсального свойства предложение 22.7 (т.е. утверждение о том, что тензорное произведение определено однозначно с точностью до изоморфизма).

23.2. Ещё примеры тензорных произведений. Далее V и W будут конечномерными векторными пространствами, с базисами $\{e_1, \dots, e_m\}$ и $\{f_1, \dots, f_n\}$ соответственно. Пусть $\{\xi_1, \dots, \xi_m\}$ — двойственный базис в V^* , т.е. базис, определяемый условием $\xi_i(e_j) = \delta_{ij}$.

Рассмотрим произведение $V^* \times W$. Определим билинейное отображение из него в пространство $\text{Hom}(V; W)$, т.е. в пространство линейных отображений из V в W , по следующему правилу. Пары $\alpha \in V^*$, $w \in W$ будет сопоставляться отображение $\alpha \otimes w$, для которого

$$(\alpha \otimes w)(v) = \alpha(v) \cdot w.$$

Легко видеть, что $\text{Ker}(\alpha \otimes w) = \text{Ker} \alpha$, а $\text{Im}(\alpha \otimes w) = \langle w \rangle$. Поэтому все отображения вида $\alpha \otimes w$ имеют ранг 1. Легко видеть, что верно и обратное: всякое отображение из V в W ранга 1 имеет вид $\alpha \otimes w$.

Мы получили билинейное отображение $V^* \times W \rightarrow \text{Hom}(V; W)$. По универсальному свойству, оно соответствует некоторому линейному отображению $V^* \otimes W \rightarrow \text{Hom}(V; W)$. Посмотрим на то, куда оно переводит базисные векторы, т.е. $\xi_i \otimes f_j$. Отображение, соответствующее паре базисных векторов $\xi_i \otimes f_j$, записывается матричной единицей E_{ji} . Эти матрицы образуют базис пространства $\text{Hom}(V; W)$, значит, полученное отображение есть изоморфизм. Мы доказали

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 23.5. $V^* \otimes W \cong \text{Hom}(V; W)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 23.6. Обратите внимание, что в образе билинейного отображения $V^* \times W \rightarrow \text{Hom}(V; W)$ содержатся *не все* линейные отображения, а только имеющие ранг 1. Однако каждое линейное отображение может быть представлено в виде линейной комбинации отображений ранга 1. Более подробно мы обсудим это чуть позже.

УПРАЖНЕНИЕ 23.7. Рассуждая аналогично, покажите, что

$$V^* \otimes W^* \cong \text{Hom}(V, W; \mathbb{K})$$

(правая часть есть пространство билинейных форм на $V \times W$).

23.3. Расширения полей. Это важный пример, показывающий, как тензорное произведение встречается «в реальной жизни». Пусть $\mathbb{L} \supset \mathbb{K}$ — поле, содержащее основное поле $\mathbb{K}$ в качестве подполя (например, $\mathbb{L} = \mathbb{C}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). В частности, $\mathbb{L}$ является векторным пространством над $\mathbb{K}$. Пусть V — какое-то еще векторное пространство над $\mathbb{K}$. Рассмотрим тензорное произведение

$$V(\mathbb{L}) = \mathbb{L} \otimes_{\mathbb{K}} V.$$

Это векторное пространство над $\mathbb{K}$, но его несложно превратить в векторное пространство над $\mathbb{L}$; для этого определим в $V(\mathbb{L})$ умножение на элементы из $\mathbb{L}$ так:

$$\lambda(\mu \otimes v) = \lambda\mu \otimes v.$$

Можно считать, что V вкладывается в $V(\mathbb{L})$ как векторное пространство над $\mathbb{K}$: при вложении $v \mapsto 1 \otimes v$. Если $e_1, \dots, e_n$ — базис V как векторного пространства над $\mathbb{K}$, то векторы $1 \otimes e_1, \dots, 1 \otimes e_n$ будут образовывать базис $V(\mathbb{L})$ как векторного пространства над $\mathbb{L}$. В частности, $\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{L}} V(\mathbb{L})$. Таким образом, про $V(\mathbb{L})$ можно думать как про пространство V , в котором мы разрешили умножать на скаляры из $\mathbb{L}$, а не только из $\mathbb{K}$.

Обратно, $V(\mathbb{L})$ можно рассматривать как векторное пространство над $\mathbb{K}$ размерности $\dim_{\mathbb{K}} V \cdot \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{L}$, базис в котором образован элементами вида $\theta_i \otimes e_j$. Здесь $\theta_1, \dots, \theta_d$ — базис $\mathbb{L}$ как векторного пространства над $\mathbb{K}$.

Например, в случае $\mathbb{L} = \mathbb{C}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ мы получаем утверждение о том, что всякий вектор из $V(\mathbb{C})$ представим в виде $v + iw$, где $v, w \in V$. В этом случае пространство $V(\mathbb{C})$ называется *комплексификацией* пространства V .

23.4. Свойства тензорного произведения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 23.8. *Имеют место следующие канонические (т.е. не зависящие от выбора базисов) изоморфизмы:*

- (1) $V \otimes W \cong W \otimes V$;
- (2) $V \otimes (W \otimes U) \cong (V \otimes W) \otimes U$;
- (3) $V \otimes (W \oplus U) \cong V \otimes W \oplus V \otimes U$.

УПРАЖНЕНИЕ 23.9. Докажите это предложение.

Из этого предложения, в частности, следует, что можно говорить о $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$, не заботясь о порядке расстановки скобок.

УПРАЖНЕНИЕ 23.10. Дайте определение тензорного произведения нескольких пространств, аналогичное 22.6, и докажите, что полученное пространство изоморфно $(\dots (V_1 \otimes V_2) \otimes \cdots \otimes V_k)$.

Для тензорного произведения k пространств верны (с очевидными модификациями) все те факты, которые мы доказывали в прошлой лекции для тензорного произведения двух пространств. Так, имеется изоморфизм

$$\text{Hom}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_k; W) \cong \text{Hom}(V_1, \dots, V_k; W),$$

определяемый по правилу

$$F(v_1 \otimes v_k) := \varphi(v_1, \dots, v_k).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 23.11. Элементы вида $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$ называются *разложимыми* элементами (или *разложимыми тензорами*).

ЗАМЕЧАНИЕ 23.12. Сумма разложимых элементов, вообще говоря, **не будет** разложимым элементом. Множество разложимых элементов **не** образует векторное подпространство в $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$, хотя и порождает его линейно.

23.5. Отображение Сегре. Рассмотрим¹ k -линейное отображение

$$V_1 \times \cdots \times V_k \rightarrow V_1 \otimes \cdots \otimes V_k, \quad (v_1, \dots, v_k) \mapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_k.$$

Если умножить каждый из v_i на некоторый скаляр λ_i , то соответствующий элемент тензорного произведения умножится на $\lambda_1 \cdots \lambda_k$, т.е. будет пропорционален $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$. Поэтому имеет место отображение произведения *проективизаций* пространств V_i в проективизацию тензорного произведения:

$$\mathbb{P}V_1 \times \cdots \times \mathbb{P}V_k \rightarrow \mathbb{P}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_k).$$

Это отображение называется *вложением Сегре*.

УПРАЖНЕНИЕ 23.13. Докажите, что это действительно вложение.

Рассмотрим более подробно случай двух пространств; для удобства введем обозначения $V_1 = U^*$, а $V_2 = V$. Тогда $U^* \otimes V \cong \text{Hom}(U, V)$ (именно для этого отождествления нам и понадобилось сопряжение). Пусть $\dim U^* = m+1$, $\dim V = n+1$, а на проективизациях этих пространств имеются однородные координаты $(\xi_0 : \cdots : \xi_m)$ и $(y_0 : \cdots : y_n)$ соответственно. Тогда имеется отображение

$$\sigma: \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n \cong \mathbb{P}U^* \otimes \mathbb{P}V \rightarrow \mathbb{P}(\text{Hom}(U; V)) \cong \mathbb{P}^{mn+m+n},$$

заданное правилом

$$\sigma: (\alpha, v) \mapsto \alpha \otimes v.$$

Нетрудно записать это отображение в координатах:

$$\sigma: ((\xi_0 : \cdots : \xi_m), (y_0 : \cdots : y_n)) \mapsto (\cdots : \xi_i y_j : \cdots).$$

Здесь мы считаем, что в $\mathbb{P}^{mn+m+n}$ введены однородные координаты z_{ij} , занумерованные парами индексов (i, j) , где $0 \leq i \leq m$, а $0 \leq j \leq n$.

¹Здесь порядок изложения немного изменен по сравнению с лекцией.

Образ отображения σ можно задать и системой уравнений. Мы получили, что $\text{Im } \sigma \subset \mathbb{P}(\text{Hom}(U; V))$ будет состоять из всех линейных отображений ранга 1. Отображение имеет ранг 1 тогда и только тогда, когда в соответствующей ему матрице все миноры 2×2 равны нулю. Получаем, что $\text{Im } \sigma$ задается однородными квадратичными уравнениями

$$z_{ij}z_{kl} - z_{il}z_{kj} = 0, \quad 0 \leq i, k \leq m, \quad 0 \leq j, l \leq n.$$

Особенно приятно обстоит дело в случае $m = n = 2$: в этом случае мы получаем отображение

$$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^3,$$

образ которого задается единственным уравнением $z_{00}z_{11} = z_{01}z_{10}$, то есть является квадрикой в $\mathbb{P}^3$. Слои над точками в каждом из $\mathbb{P}^1$, то есть множества $\{\alpha\} \times \mathbb{P}^1$ и $\mathbb{P}^1 \times \{v\}$, при этом отображении переходят в два семейства прямолинейных образующих на квадрике.

УПРАЖНЕНИЕ 23.14. Покажите, что $\text{Im } \sigma$ не содержится ни в какой гиперплоскости. (Указание: этот факт уже неоднократно обсуждался в этой лекции).

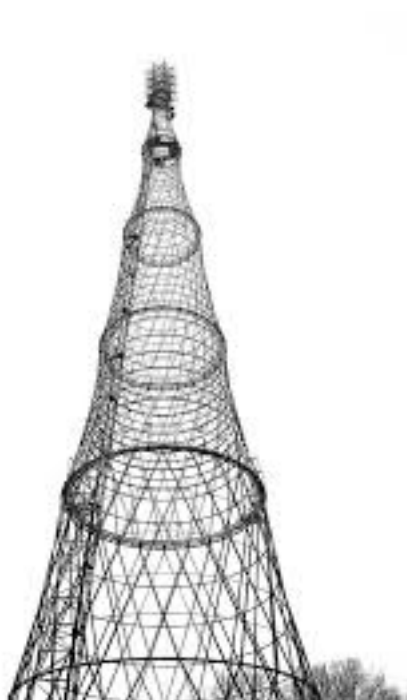


Рис. 1. Шуховская башня на Шаболовке собрана из секций, имеющих форму квадрики Сегре. Прямолинейные образующие выполнены из чугуна.

E-mail address: esmirnov@hse.ru