

Симметрические многочлены

Напомним, что через p_k обозначаются *ньютоновские степенные суммы*: $p_k = x_1^k + \dots + x_n^k$.

Задача 1. Рассмотрим многочлен $E(t) = (1 + x_1 t) \dots (1 + x_n t) = \sum_{k=0}^n e_k t^k$ от переменных $x_1, \dots, x_n, t$.

а) Докажите, что $\frac{d}{dt} \ln E(t) = \sum_{k \geq 1} (-1)^{k+1} p_k t^{k-1}$.

б) Докажите, что $p_k - e_1 p_{k-1} + e_2 p_{k-2} + \dots + (-1)^{k-1} e_{k-1} p_1 + (-1)^k k e_k = 0$.

Задача 2. Докажите следующие детерминантные тождества:

$$\text{а) } p_k = \begin{vmatrix} e_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2e_2 & e_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (k-1)e_{k-1} & e_{k-2} & e_{k-3} & \dots & e_1 & 1 \\ ke_k & e_{k-1} & e_{k-2} & \dots & e_2 & e_1 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } k! \cdot e_k = \begin{vmatrix} p_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ p_2 & p_1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{k-1} & p_{k-2} & p_{k-3} & \dots & p_1 & k-1 \\ p_k & p_{k-1} & p_{k-2} & \dots & p_2 & p_1 \end{vmatrix}.$$

Определение. Разбиением числа n называется набор λ целых неотрицательных чисел $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, где $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ и $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = n$.

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — набор натуральных чисел. Пусть $a_\alpha = \begin{vmatrix} x_1^{\alpha_1} & \dots & x_n^{\alpha_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^{\alpha_n} & \dots & x_n^{\alpha_n} \end{vmatrix}$. В частности, если $\delta = (n-1, n-2, \dots, 1, 0)$, то a_δ — это определитель Вандермонда.

Задача 3 (многочлены Шура). Пусть λ — разбиение. Положим $s_\lambda(x_1, \dots, x_n) = a_{\lambda+\delta}/a_\delta$. Докажите, что:

а) $s_\lambda(x_1, \dots, x_n)$ — целочисленный симметрический многочлен;

б) $s_\lambda(x_1, \dots, x_n)$ при всевозможных λ образуют базис векторного пространства симметрических многочленов от $x_1, \dots, x_n$;

в) Вычислите многочлены s_λ при $\lambda = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ (k единиц) и $\lambda = (k, 0, \dots, 0)$.

Задача 4. Выпишите явно многочлены Шура при $n = 2$ и $n = 3$ для всевозможных разбиений веса не более 4.

Задача 5. Вычислите многочлен Шура $s_\delta(x_1, \dots, x_n)$.

Задача 6* (формулы Коши). Докажите тождества:

$$\prod_{i,j=1}^n (1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_{\lambda} s_{\lambda}(x) s_{\lambda}(y); \quad \prod_{i,j=1}^n (1 + x_i y_j) = \sum_{\lambda} s_{\lambda}(x) s_{\lambda^*}(y).$$

Здесь λ^* — разбиение, сопряжённое к λ . При этом λ пробегает множество диаграмм Юнга из не более чем n строк.

Задача 7* (формулы Пьери). Пусть λ — разбиение (будем представлять его как диаграмму Юнга). Обозначим через $\lambda \otimes k$ (соотв. $\lambda \otimes 1^k$) множество разбиений, полученных из данного добавлением к соответствующей диаграмме Юнга k клеточек, из которых никакие две не лежат в одном столбце (соотв. в одной строке). Докажите, что: а) $s_{\lambda} e_k = \sum_{\mu \in \lambda \otimes 1^k} s_{\mu}$; б) $s_{\lambda} h_k = \sum_{\mu \in \lambda \otimes k} s_{\mu}$.

Задача 8* (формулы Якоби–Труди). Пусть λ — разбиение с не более чем n ненулевыми компонентами. Докажите, что

$$s_{\lambda} = \det(h_{\lambda_i - i + j})_{1 \leq i, j \leq n} \quad \text{и} \quad s_{\lambda^*} = \det(e_{\lambda_i - i + j})_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Билинейные формы

Определение. Пусть на векторных пространствах V и V' над полем $\mathbb{K}$, где $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$, заданы невырожденные симметрические билинейные формы α и α' соответственно. Линейное отображение $A: V \rightarrow V'$ называется *изометрией*, если $\alpha'(Av, Aw) = \alpha(v, w)$; пространства V и V' в таком случае называются *изометричными*. Цель следующей задачи – доказать теорему Витта.

Теорема Витта. Пусть V и V' – изометричные пространства (с заданными формами α и α'), $U \subset V$ и $U' \subset V'$ – подпространства в них, и $A_U: U \rightarrow U'$ – изометрия этих подпространств. Тогда существует такая изометрия $A: V \rightarrow V'$, что $A|_U = A_U$. Иными словами, данная изометрия подпространств продолжается до изометрии обобщающих пространств.

Задача 9. Докажите теорему Витта, проделав следующие шаги:

- а) Докажите, что если U вырождено, то существует такое подпространство $\bar{U}$, где $U \subset \bar{U} \subset V$ и $\dim \bar{U} = \dim U + 1$, и линейное отображение $\bar{A}_{\bar{U}}: \bar{U} \rightarrow V'$, продолжающее A_U , для которого $\bar{A}_{\bar{U}}: \bar{U} \rightarrow \bar{A}_{\bar{U}}(\bar{U})$ является изометрией. (Т.е. изометрию можно продолжить с вырожденного подпространства).
- б) Пусть $V = V'$, и пусть $U \subset V$, $U = \mathbb{K} \cdot u$ – неизотропная прямая (т.е. $\alpha(u, u) \neq 0$). Положим $u' = A_U u$. Тогда теорема Витта справедлива для подпространства U .

УКАЗАНИЕ. Рассмотрите отражения относительно векторов $u \pm u'$.

- в) Пусть $V = V'$ и $\dim U \geq 2$. Докажите теорему Витта, воспользовавшись ортогональным разложением и индукцией по $\dim U$.

Пусть Γ – граф с конечным числом вершин $\{1, \dots, n\}$. Построим по нему квадратичную форму на $\mathbb{R}^n$:

$$q_{\Gamma}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i \sim j} x_i x_j,$$

где вторая сумма берется по множеству всех ребер графа Γ . Наша цель – выяснить, для каких графов Γ форма q_{Γ} является положительно определенной.

Задача 10. Если $q_{\Gamma} > 0$, то граф Γ

- а) не содержит циклов (в частности, петель и кратных ребер);
- б) не содержит вершин степени 4 и больше;
- в) содержит не более одной вершины степени 3.

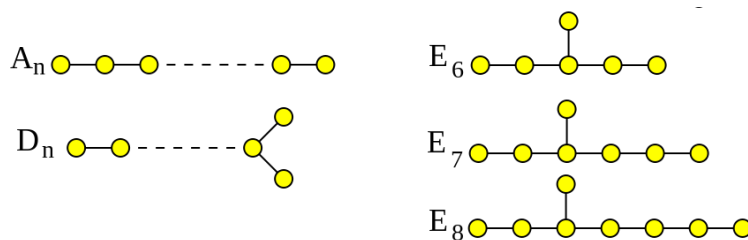
Задача 11. Пусть Γ – граф с вершиной степени 3, из которой выходят три «щупальца» длин p , q и r . Покажите, что если $q_{\Gamma} > 0$, то

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{r+1} > 1.$$

Перечислите все тройки (p, q, r) , удовлетворяющие этому неравенству.

Задача 12*. Убедитесь, что все графы, для которых $q_{\Gamma} > 0$, перечислены на рисунке. Они называются *диаграммами Дынкина*¹ и обозначаются A_n ($n \geq 1$), D_n ($n \geq 4$), E_6 , E_7 и E_8 . Для каждой из диаграмм Дынкина Γ найдите $\det q_{\Gamma}$.

¹Точнее, диаграммами Дынкина с простыми связями (simply-laced)



Инвариант Дена

Этот раздел посвящён применению тензорного произведения в народном хозяйстве. Напомним, что классическая теорема Бойяи–Гервина утверждает, что любые два многоугольника равной площади равносоставлены (один из них всегда можно разрезать на части, из которых можно сложить второй). Выясним, верно ли аналогичное утверждение в трёхмерном пространстве.

Третья проблема Гильберта. Являются ли куб и правильный тетраэдр равного объема равносоставленными (т.е. можно ли куб разрезать на несколько многогранников и сложить из них правильный тетраэдр того же объема)?

Инвариант Дена lite. Прежде чем приступить к третьей проблеме Гильберта, решим следующую задачу: можно ли разрезать прямоугольник 1×2 на конечное число прямоугольников *со сторонами, параллельными сторонам исходного* и сложить из них квадрат $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$, если прямоугольники запрещается поворачивать?

Задача 13. Пусть прямоугольник P имеет стороны a и b . Обозначим через $D(P)$ элемент $a \otimes b$ в тензорном произведении $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$. Докажите, что

- Инвариант D аддитивен: если прямоугольник P разбит на прямоугольники P_i , то $D(P) = \sum D(P_i)$.
- Прямоугольник 1×2 нельзя разрезать на конечное число прямоугольников и сложить из них квадрат $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$. (В этой задаче стороны всех прямоугольников параллельны осям координат.)

Инвариант Дена. Пусть P — многогранник в $\mathbb{R}^3$ (например, выпуклый). Обозначим через ℓ_i длины его ребер, а через α_i величины соответствующих двугранных углов. *Инвариантом Дена* многогранника P называется элемент $\text{Dehn}(P) := \sum \ell_i \otimes \frac{\alpha_i}{\pi}$ пространства $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} (\mathbb{R}/\mathbb{Q})$.

Задача 14. Докажите, что инвариант Дена аддитивен: если многогранник P разбит на многогранники P_i , то $\text{Dehn}(P) = \sum \text{Dehn}(P_i)$.

Задача 15. Докажите, что угол $\arccos 1/3$ не является рациональным кратным π .
УКАЗАНИЕ. Рассмотрите многочлен $\cos n \arccos \phi$.

Задача 16. Решите третью проблему Гильберта.

Разные задачи

Задача 17. а) Покажите, что $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ является конечнопорожденным модулем над кольцом симметрических многочленов.

б*) Покажите, что это свободный модуль с $n!$ образующими.

Задача 18. а) Покажите, что любой многочлен от коэффициентов комплексной матрицы, инвариантный относительно сопряжения, является многочленом от коэффициентов характеристического многочлена.

б*) Верно ли это над полем положительной характеристики?

Задача 19. а) Докажите, что линейный оператор $\mathcal{A} \in \text{End}(\mathbb{K}^n)$ над полем нулевой характеристики нильпотентен тогда и только тогда, когда $\text{tr } \mathcal{A}^k = 0$ для всех $1 \leq k \leq n$.

б*) Верно ли это над полем положительной характеристики?

Задача 20* (пфаффиан). Пусть $\dim V = 2n$, $\omega \in \Lambda^2 V$ — невырожденный бивектор на V (т.е. невырожденная кососимметричная билинейная форма на V^*).

а) Покажите, что оператор $\Lambda^k V \rightarrow \Lambda^{2n-k}$ внешнего умножения на $\omega \wedge \dots \wedge \omega$ ($n - k$ множителей) невырожден.

б) Покажите, что определитель кососимметрической матрицы есть квадрат некоторого многочлена (пфаффиана) от ее коэффициентов.

Задача 21* (теорема Амицура–Левицкого). Пусть $M \in \text{Mat}_n(\mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} \Lambda^*(V)$ — матрица с коэффициентами из $V = \Lambda^1(V) \subset \Lambda^\bullet V$.

а) Покажите, что $\text{tr } M^{2k} = 0$ при $k = 1, 2, \dots$.

б) Покажите, что $M^{2n} = 0$.

в) Пусть $A_1, \dots, A_{2n}$ — произвольный набор матриц порядка n . Докажите, что $\sum_{\sigma \in S_{2n}} (-1)^\sigma A_{\sigma(1)} \dots A_{\sigma(2n)} = 0$.

Правила игры. Задачи можно сдавать семинаристу или учебному ассистенту **вашей** группы (список см. на странице курса). Сдавшие 24, 27 или 30 пунктов задач получают оценку 8, 9 или 10 соответственно. Звёздочкой отмечены более сложные (по мнению автора листка) задачи. Сданные задачи должны оказаться в кондуите до **31 мая 2019 г., 23:59**.