

Алгебра, первый курс, весенний семестр 2019 г.

Предварительный план лекций

Е. Ю. Смирнов

Тема 1. Группы.

1. Группы. Нормальные подгруппы, левые и правые смежные классы. Гомоморфизмы групп. Нормальные подгруппы как ядра гомоморфизмов.
2. Факторгруппы. Теорема о гомоморфизме. Свободные группы. Задание группы образующими и соотношениями.
3. Абелевы группы. Свободные абелевы группы. Подгруппа свободной абелевой группы свободна, неравенство на ранги.
4. Теорема о взаимных базисах. Конечнопорожденные абелевы группы. Примарное разложение, его единственность.
5. Действия групп (напоминание). Формула Бернсайда для числа орбит. Классы сопряженности, центр. Нетривиальность центра p -группы.
6. Автоморфизмы. Полупрямые произведения. Коммутант. Разрешимые группы.
7. Простые группы. Простота A_5 , A_n , $SL_n(K)$. Теорема Жордана–Гельдера (без доказательства).
8. Силовские подгруппы. Теоремы Силова.

Тема 2. Модули над кольцами.

1. Кольца (напоминание). Идеалы. Евклидовы кольца, кольца главных идеалов, факториальные кольца, нетеровы кольца.
2. Факторкольца. Гомоморфизмы колец. Максимальные и простые идеалы, равносильность этих понятий в кольцах главных идеалов. Простота и неприводимость элемента.
3. Модуль над кольцом. Примеры: абелева группа, векторное пространство, векторное пространство с оператором. Модули, подмодули, фактормодули, гомоморфизмы. Системы порождающих, свободный модуль, циклический модуль.
4. Модули над евклидовыми кольцами. Подмодуль свободного модуля свободен. Базис и ранг свободного модуля. Теорема о взаимных базисах для модулей над евклидовыми кольцами.
5. Теорема о конечнопорожденных модулях над евклидовыми кольцами. Примарное разложение, его единственность.

6. Следствия теоремы о конечнопорожденных модулях: теорема о структуре к.п. абелевых групп, жорданова и фробениусова нормальные формы.
7. Структура векторного пространства с оператором. Корневое разложение. Структура нильпотентного оператора. Теорема Гамильтона–Кэли.

Тема 3. Конечнопорожденные алгебры.

1. Поле частных целостного кольца. Лемма Гаусса. Факториальность кольца многочленов от нескольких переменных.
2. Симметрические многочлены. Основная теорема о симметрических многочленах.
3. Результант и дискриминант. Теорема Безу.
4. Нетеровы кольца. Теорема Гильберта о базисе идеала.
5. Инварианты действия конечных групп. Теорема Гильберта об инвариантах.

Тема 4. Линейная алгебра.

1. Пространство с билинейной формой. Приведение билинейной формы к сумме квадратов. Невырожденная билинейная форма. Двойственное пространство.
2. Скалярное произведение. Евклидово и эрмитово пространство. Линейные операторы в пространстве со скалярным произведением. Отождествление оператора с билинейной формой.
3. Операторы специального вида в евклидовом/эрмитовом пространстве: симметрические, кососимметрические, ортогональные/эрмитовы, косоэрмитовы, унитарные. Канонический вид, диагонализуемость. Полярное разложение.
4. Симметрические, кососимметрические, эрмитовы, косоэрмитовы билинейные формы. Приведение симметрической формы к главным осям.
5. Полилинейные формы. Тензоры. Тензорное произведение пространств. Универсальное свойство.
6. Тензорная алгебра. Подъем и спуск индексов.
7. Симметрическая и внешняя степень пространства. Симметрическая и внешняя алгебры.
8. Кватернионы. Группа единичных кватернионов. Эпиморфизмы $SU(2) \rightarrow SO(3)$ и $SU(2) \times SU(2) \rightarrow SO(4)$.