

Программа коллоквиума 28–29 марта 2019 г.

На коллоквиуме вам будет предложен билет, включающий один–два теоретических вопроса из перечисленных и одну–две задачи. Также экзаменатор может на своё усмотрение задавать вам дополнительные вопросы по всей программе, включающие в себя в числе прочего проверку знания и понимания основных определений и конструкций, изложенных в курсе.

Теоретические вопросы

1. Докажите, что подгруппа свободной группы свободна, и ранг подгруппы не превосходит ранга группы.
2. Докажите теорему о взаимных базисах для свободных абелевых групп.
3. Докажите теорему о существовании примарного разложения конечнопорожденной абелевой группы.
4. Докажите теорему о единственности примарного разложения конечнопорожденной абелевой группы.
5. Найдите группу автоморфизмов группы $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
6. Докажите формулу Бернсайда для числа орбит действия группы.
7. Докажите, что коммутант есть наименьшая нормальная подгруппа, фактор по которой абелев.
8. Вычислите коммутанты групп S_n и A_n .
9. Докажите порождённость группы $SL_n(K)$ трансвекциями (т.е. элементами вида $E + E_{ij}$), и найдите ее коммутант.
10. Докажите, что группа разрешима тогда и только тогда, когда её нормальная подгруппа и факторгруппа разрешимы.
11. Докажите нетривиальность центра p -группы.
12. Докажите разрешимость p -группы и коммутативность группы порядка p^2 .
13. Докажите первую теорему Силова.
14. Докажите вторую теорему Силова.
15. Докажите третью теорему Силова.
16. Докажите простоту группы A_5 (любым известным вам способом).
17. Докажите, что всякое кольцо главных идеалов факториально.
18. Докажите китайскую теорему об остатках для колец главных идеалов.
19. Докажите, что идеал максимален (соотв. прост) тогда и только тогда, когда факторкольцо по нему является полем (соотв. областью целостности).
20. Докажите, что всякий простой идеал в кольце главных идеалов максимален.
21. Докажите, что подмодуль свободного модуля над кольцом главных идеалов — свободный модуль, ранг которого не превосходит ранг исходного модуля.
22. Выведите теорему о фробениусовой нормальной форме из теоремы о структуре конечнопорожденных модулей над кольцом главных идеалов.
23. Выведите теорему о жордановой нормальной форме из теоремы о структуре конечнопорожденных модулей над кольцом главных идеалов.
24. Докажите теорему Гамильтона–Кэли (любым известным вам способом).