

7. Седьмая лекция, 5 февраля 2019 г.

7.1. Коммутант. Пусть $x, y \in G$ — два элемента группы. Их *коммутатором* называется элемент $(x, y) = xyx^{-1}y^{-1}$. Очевидны следующие свойства коммутатора:

- (1) $(x, y) = e$ тогда и только тогда, когда x и y коммутируют.
- (2) $(x, y)^{-1} = (y, x)$ (обратный к коммутатору элемент снова является коммутатором).

Напротив, произведение двух коммутаторов не обязано быть коммутатором.

Все коммутаторы порождают подгруппу в G , которая называется *коммутантом* группы G (или, реже, её *производной группой*) и обозначается через G' :

$$G' := \langle (x, y) \mid x, y \in G \rangle.$$

Ясно, что $G' = \{e\}$ тогда и только тогда, когда G абелева.

Пусть $\varphi: G \rightarrow H$ — гомоморфизм групп. Поскольку $\varphi((x, y)) = (\varphi(x), \varphi(y))$, то $\varphi(G') \subset H'$. Если φ к тому же является эпиморфизмом, то $\varphi(G') = H'$.

Теперь возьмём в качестве H саму G , а в качестве φ — какой-нибудь её внутренний автоморфизм. Получается, что $\varphi(G') = G'$. Это значит, что G' — подгруппа, инвариантная относительно всех внутренних автоморфизмов. Значит, она нормальна в G .

ТЕОРЕМА 7.1. *Всякая подгруппа $H \subset G$, содержащая G' , нормальна. При этом факторгруппа G/H абелева (в частности, G/G' тоже абелева). Обратно, если H — такая нормальная подгруппа в G , что G/H абелева, то G' содержится в H . Другими словами, G' — наименьшая нормальная подгруппа в G , факторгруппа по которой абелева.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $H \supset G'$. Пусть $h \in H, g \in G$. Тогда

$$ghg^{-1} = ghg^{-1}h^{-1}h = (g, h) \cdot h \in G' \cdot H \subset H,$$

поэтому $H \triangleleft G$.

Далее, пусть H — нормальная подгруппа в G , и $g_1, g_2 \in G$. Докажем, что g_1H и g_2H коммутируют, т.е. G/H коммутативна, тогда и только тогда, когда $G' \subset H$.

$$(g_1H, g_2H) = g_1Hg_2Hg_1^{-1}Hg_2^{-1}H = g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1}H = (g_1, g_2)H.$$

Если факторгруппа G/H абелева, то $(g_1, g_2)H = eH$, т.е. $(g_1, g_2) \in H$. Обратно, если $(g_1, g_2) \in H$, то из приведенного равенства получаем, что элементы факторгруппы g_1H и g_2H коммутируют. Теорема доказана. $\square$

7.2. Коммутанты некоторых групп. Из курса прошлого семестра вам известно следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.2. *Группа чётных перестановок A_n порождается тройными циклами (ijk) . При $n \geq 5$ группа A_n порождается парами независимых транспозиций $(ij)(kl)$.*

ПРИМЕР 7.3. $S'_n = A_n$ при $n \geq 3$. Действительно, $S'_n \subset A_n$, т.к. группа $S_3/A_3 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ абелева. Далее, найдём S'_3 . Эта группа содержится в A_3 . Но в A_3 нет никакой меньшей подгруппы, кроме единичной, поэтому S'_3 совпадает со всей A_3 (он отличен от $\{e\}$, т.к. S_3 некоммутативна). A_3 содержит оба 3-цикла (123) и (132) . Поэтому S'_n содержит всевозможные 3-циклы. Поэтому из предложения 7.2 следует, что $S'_n = A_n$.

ПРИМЕР 7.4. $A'_4 = V_4$, где $V_4 = \langle (ij)(kl) \rangle$ — четверная группа Клейна. Действительно, $A_4/V_4 \cong \mathbb{Z}_3$ абелева, т.е. $A'_4 \subset V_4$. Но V_4 не содержит никаких нетривиальных подгрупп, нормальных в A_4 (и вообще V_4 — единственная нормальная подгруппа в A_4 , отличная от единичной и её самой), поэтому $A'_4 = V_4$.

ПРИМЕР 7.5. Предыдущий пример показывает, что при $n \geq 5$ коммутант A'_n содержит все пары независимых транспозиций. Поэтому он совпадает со всей группой A_n .

ЗАМЕЧАНИЕ 7.6. Можно показать, что при $n \geq 5$ группа A_n проста, т.е. не содержит нетривиальных нормальных подгрупп (этот результат принадлежит Эваристу Галуа). Разумеется, для всякой неабелевой простой группы G верно, что $G' = G$.

Вычислим коммутанты групп $GL_n(K)$ и $SL_n(K)$. Для этого нам понадобится следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.7. *Группа $SL_n(K)$ порождается трансвекциями $E + cE_{ij}$ при $i \neq j$, т.е. матрицами элементарных преобразований первого рода (здесь E — единичная матрица, E_{ij} — матричная единица, т.е. матрица, все элементы которой равны нулю, кроме (i, j) -го, который равен 1).*

ЗАДАЧА 7.8. Докажите предложение 7.7.

Докажем, что $GL_n(K)' = SL_n(K)' = SL_n(K)$, в предположении, что поле K содержит более трёх элементов. Во-первых, $GL_n(K)/SL_n(K)$ есть группа скалярных матриц, которая является абелевой, т.е. $GL_n(K)' \subset SL_n(K)$. Далее, можно проверить явно, что

$$\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & (\lambda^2 - 1)c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому если в K найдётся элемент λ , отличный от 0 и ± 1 , то группа $GL_n(K)'$ будет содержать все трансвекции. Поэтому она совпадает с $SL_n(K)$ в силу предыдущего предложения.

7.3. Разрешимые группы. Определим *высшие коммутанты* $G^{(i)}$ группы G по следующему правилу: $G^{(1)} = G'$, $G^{(i)} = (G^{(i-1)})'$. Получим ряд подгрупп, каждая из которых нормальна в предыдущей:

$$G = G^{(0)} \triangleright G^{(1)} \triangleright \dots \triangleright G^{(k)} \triangleright \dots$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.9. Группа G *разрешима*, если $G^{(k)} = \{e\}$ для некоторого k .

ПРИМЕР 7.10. В предыдущем пункте мы видели, что S_4 разрешима (для неё $S_4^{(3)} = \{e\}$, т.к. $S_4^{(2)} = V_4$ абелева), а при $n \geq 5$ группа S_n уже не является разрешимой.

Справедлива следующая несложная

ТЕОРЕМА 7.11. *Пусть $H \triangleleft G$ — нормальная подгруппа. Группа G разрешима тогда и только тогда, когда H и G/H разрешимы.*

ЗАДАЧА 7.12. Докажите эту теорему.

E-mail address: esmirnov@hse.ru