

Группы

Задача 1. а) Докажите, что всякая подгруппа индекса 2 нормальна.

б) Пусть G — конечная группа, p — наименьший простой делитель ее порядка. Докажите, что всякая подгруппа индекса p в G нормальна.

Задача 2. Пользуясь теоремами Силова, докажите, что все группы порядка: **а)** p^2q ;

б) pqr разрешимы. (Здесь p, q, r — различные простые числа).

Задача 3. а) Покажите, что группа $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ проста.

б*) Укажите какой-нибудь композиционный ряд группы $\mathrm{SO}(4, \mathbb{R})$.

Задача 4. Опишите все абелевы группы порядка 360. Для каждой из них найдите порядки всех элементов и число элементов каждого порядка.

Задача 5. Конечная абелева группа разложена в прямую сумму циклических $\mathbb{Z}/\lambda_1\mathbb{Z} \oplus \dots \mathbb{Z}/\lambda_m\mathbb{Z}$, где $\lambda_1|\lambda_2|\dots|\lambda_m$. Докажите, что $\lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_k$ равняется наибольшему общему делителю всех миноров порядка k матрицы соотношений.

Задача 6. Опишите все группы порядка 55 и задайте каждую из них образующими и соотношениями.

Задача 7. Найдите коммутант полупрямого произведения $\langle a \rangle_n \rtimes_k \langle b \rangle_m$.

Задача 8. а) Покажите, что n -мерный параллелепипед с целочисленными вершинами не содержит целых точек (кроме вершин) тогда и только тогда, когда его объем равен 1.

б*) Вычислите объем параллелепипеда через количества целых точек на его гранях разных размерностей.

Задача 9*. а) Покажите, что (бесконечнопорожденная) абелева группа $\mathbb{Q}$ не раскладывается в прямую сумму нетривиальных подгрупп.

б) Существует ли абелева группа с тем же свойством, все элементы которой имеют конечный порядок?

Автоморфизмы групп перестановок

Задача 10. Докажите, что всякая простая группа порядка 60 изоморфна $\mathfrak{A}_5$.

Задача 11. Покажите, что если $n \geq 3$ и $n \neq 6$, то всякий автоморфизм группы $\mathfrak{S}_n$ является внутренним.

УКАЗАНИЕ. Автоморфизм, переводящий транспозиции в транспозиции, внутренний.

Задача 12. Пусть H — подгруппа индекса 6 в $\mathfrak{S}_6$. Тогда действие $\mathfrak{S}_6$ на $\mathfrak{S}_6/H$ задает гомоморфизм $\mathfrak{S}_6 \rightarrow \mathfrak{S}_6$. Покажите, что это автоморфизм, и выведите отсюда, что любая подгруппа индекса 6 в $\mathfrak{S}_6$ изоморфна $\mathfrak{S}_5$.

Задача 13. Докажите следующие утверждения:

а) Действие группы $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ на $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_5)$ является транзитивным и определяет вложение $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ в $\mathfrak{S}_6$.

б) Это вложение не совпадает ни с одним из 6 «стандартных» вложений $\mathfrak{S}_5$ из $\mathfrak{S}_6$, а соответствующий автоморфизм из предыдущей задачи не является внутренним. (УКАЗАНИЕ. Куда этот автоморфизм переводит транспозицию?)

Задача 14. Докажите, что группа *внешних автоморфизмов* $\text{Out } \mathfrak{S}_6 = \text{Aut } \mathfrak{S}_6 / \text{Inn } \mathfrak{S}_6$ изоморфна $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (то есть построенный в предыдущей задаче автоморфизм $\mathfrak{S}_6$ единственен с точностью до внутреннего автоморфизма). Верно ли, что $\text{Aut } \mathfrak{S}_6 = \text{Inn } \mathfrak{S}_6 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$?

Кольца и поля

Задача 15. Докажите, что кольцо $\mathbb{C}[x, y]/(x^2 + y^2 - 1)$ не изоморфно $\mathbb{C}[x]$, но его поле частных изоморфно $\mathbb{C}(x)$.

УКАЗАНИЕ. Вспомните, что такое универсальная тригонометрическая подстановка.

Задача 16. Докажите, что любое кольцо, заключённое между кольцом главных идеалов A и его полем частных, само является кольцом главных идеалов.

Задача 17. Рассмотрим кольцо *чисел Эйзенштейна* $\mathbb{Z}[\rho]$, состоящего из комплексных чисел вида $a + b\rho \in \mathbb{C}$, где $\rho = \frac{i\sqrt{3}-1}{2}$, $a, b \in \mathbb{Z}$.

- а) Введите в нём норму и докажите, что $\mathbb{Z}[\rho]$ является евклидовым.
- б) Докажите, что целое простое число $p \in \mathbb{Z}$ является простым в кольце чисел Эйзенштейна $\mathbb{Z}[\rho]$ тогда и только тогда, когда кольцо $\mathbb{F}_p[x]/(x^2 + x + 1)$ является полем.
- в*) Докажите, что из натуральных чисел простыми числами Эйзенштейна являются только простые вида $p = 6k - 1$ и $p = 2$.
- г*) Найдите количество целочисленных решений уравнения $x^2 - xy + y^2 = n$ в зависимости от $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 18*. Докажите, что кольцо $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-19}}{2}]$ является кольцом главных идеалов, но не евклидово.

Линейные операторы

Задача 19. а) Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор, являющийся фробениусовым блоком (над произвольным полем). Покажите, что все операторы, коммутирующие с $\mathcal{A}$, являются полиномами от $\mathcal{A}$.

- б) Покажите, что верно обратное: если с $\mathcal{A}$ коммутируют только полиномы от $\mathcal{A}$, то $\mathcal{A}$ состоит из единственного фробениусова блока.

Задача 20. а) Пусть $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ — линейный оператор в комплексном векторном пространстве. Докажите, что существует единственное разложение $\mathcal{A} = \mathcal{A}_s + \mathcal{A}_n$, где $\mathcal{A}_s$ диагонализуем, $\mathcal{A}_n$ нильпотентен, и $\mathcal{A}_s \mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n \mathcal{A}_s$.

- б) Покажите, что $\mathcal{A}_s$ и $\mathcal{A}_n$ являются многочленами от $\mathcal{A}$.

Задача 21. Пусть $p(t) \in \mathbb{C}[t]$ — произвольный полином, $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ — линейный оператор. Как связаны: **а)** собственные значения; **б*)** минимальные многочлены операторов $\mathcal{A}$ и $p(\mathcal{A})$?

Задача 22*. Операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ в комплексном векторном пространстве таковы, что $\mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A}$ имеет ранг 1. Докажите, что эти операторы в некотором базисе можно одновременно привести к верхнетреугольному виду.

Правила игры. Задачи можно сдавать семинаристу или учебному ассистенту **вашей** группы (список см. на странице курса). Сдавшие 20, 23 или 26 пунктов задач получают оценку 8, 9 или 10 соответственно. Звёздочкой отмечены более сложные (по мнению автора листка) задачи. Сданные задачи должны оказаться в кондуите до 22 марта 2019 г., 23:59.