

Семинар 5

5.1. Докажите, что число трехмерных диаграмм Юнга в прямоугольном параллелепипеде $a \times b \times c$ равняется

$$PP(a, b, c) = \det \left(\binom{a+b+i-1}{b+j-1} \right)_{i,j=1}^c = \det \begin{pmatrix} \binom{a+b}{b} & \binom{a+b}{b+1} & \cdots & \binom{a+b}{b+c-1} \\ \binom{a+b+1}{b} & \binom{a+b+1}{b+1} & \cdots & \binom{a+b+1}{b+c-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{a+b+c-1}{b} & \binom{a+b+c-1}{b+1} & \cdots & \binom{a+b+c-1}{b+c-1} \end{pmatrix}.$$

Определение. n -й убывающей степенью числа x называется число $x^{\downarrow n} = x(x-1)\dots(x-n+1)$. Заметим, что $x^{\downarrow m+n} = x^{\downarrow m} \cdot (x-m)^{\downarrow n}$.

5.2. Докажите, что

$$PP(a, b, c) = \left(\prod_{j=1}^c \frac{(a+b+j-1)^{\downarrow b}}{(b+j-1)!} \right) \det(a+i-1)^{\downarrow j-1}.$$

УКАЗАНИЕ. Представьте биномиальный коэффициент как отношение убывающих степеней и воспользуйтесь линейностью определителя по строкам и столбцам.

5.3. а) Вычислите определитель $\det(x_i^{\downarrow j-1})$.

б) Вычислите определитель $\det(a+i-1)^{\downarrow j-1}$ из предыдущей задачи.

5.4 (формула Макмагона). Докажите, что:

а) $PP(a, b, c) = \prod_{i=1}^b \prod_{j=1}^c \frac{a+i+j-1}{i+j-1}$; **б)** $PP(a, b, c) = \prod_{k=1}^a \prod_{i=1}^b \prod_{j=1}^c \frac{i+j+k-1}{i+j+k-2}$.

5.5. а) Докажите, что производящая функция для числа трехмерных диаграмм Юнга в прямоугольном параллелепипеде равна

$$PP_q(a, b, c) = \prod_{k=1}^a \prod_{i=1}^b \prod_{j=1}^c \frac{[i+j+k-1]_q}{[i+j+k-2]_q}.$$

б) Выведите из этой формулы, что производящая функция для числа произвольных трехмерных диаграмм Юнга имеет вид

$$PP(q) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^k)^k}.$$

5.6. Пусть $\Lambda_k = (k-1, \dots, 2, 1)$ — ступенчатая диаграмма Юнга. Докажите, что число поддиаграмм Юнга в ней равняется k -му числу Каталана $\text{Cat}_k = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}$.

5.7. Докажите, что число трехмерных диаграмм Юнга, лежащих внутри призмы с основанием Λ_k и высотой h , равняется определителю

$$\det(\text{Cat}_{k+i+j-2})_{i,j=1}^h = \det \begin{pmatrix} \text{Cat}_k & \text{Cat}_{k+1} & \dots & \text{Cat}_{k+h-1} \\ \text{Cat}_{k+1} & \text{Cat}_{k+2} & \dots & \text{Cat}_{k+h} \\ \vdots & & & \vdots \\ \text{Cat}_{k+h-1} & \text{Cat}_{k+h} & \dots & \text{Cat}_{k+2h-2} \end{pmatrix}.$$

5.8. Докажите, что определитель из предыдущей задачи равен

$$\prod_{1 \leq i \leq j \leq h} \frac{i+j+2k-2}{i+j-2}.$$