

Семинар 3

3.1. Используя теорему Литтлвуда, найдите коэффициент перед $x_1^2 x_2^3 x_3 x_4^4 x_5^3$ в функции Шура $s_{(5,4,3,1)}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$.

3.2. Используя теорему Литтлвуда, докажите, что s_λ получается из m_λ прибавлением суммы мономиальных симметрических функций m_μ , где μ пробегает множество разбиений из того же числа клеточек, что λ , лексикографически меньших λ . Выведите отсюда, что s_λ образуют базис в пространстве симметрических функций.

Числом Костки $K_{\lambda\mu}$ называется количество полустандартных таблиц Юнга формы λ и веса μ .

3.3. Найдите числа Костки **а)** $K_{(k,k),(k-1,1^{k+1})}$; **б)** $K_{(k,k),(1^{2k})}$.

3.4. Используя формулы Пьери (задача 1.6), покажите, что число Костки $K_{\lambda\mu}$, где $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k)$ не зависит от порядка компонент $\mu_1, \dots, \mu_k$.

3.5. а) Введите на решетке $\mathbb{Z}^2$ веса так, чтобы число путей из точки $(0, 0)$ в точку $(k, n - k)$ с этими весами было равно $e_k(x_1, \dots, x_n)$.

б) Докажите вторую формулу Якоби–Труди:

$$\tilde{s}_\lambda = \det(e_{\lambda_i^* + j - i}).$$

$$(\text{Как и на лекции, } \tilde{s}_\lambda = \sum_{T \in \text{SSYT}(\lambda)} x^T).$$

Напомним, что n -е число Каталана $Cat(n)$ равно числу путей на решетке $\mathbb{Z}^2$ из точки $(0, 0)$ в точку (n, n) , не поднимающихся выше прямой $y = x$.

3.6. Докажите, что $\det(Cat(i + j - 2))_{i,j=1}^n = 1$ при любом n .