

Семинар 2

2.1. Докажите, что *главные специализации* многочленов e_k и h_k дают q -биномиальные коэффициенты:

$$e_k(1, q, \dots, q^{n-1}) = q^{k(k-1)/2} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}, \quad h_k(1, q, \dots, q^{n-1}) = \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}.$$

2.2. Пусть λ — разбиение, для которого $\lambda_1 \leq n$. Докажите «двойственную формулу Якоби–Труди»:

$$s_\lambda = \det(e_{\lambda'_i + j - i})_{i,j=1}^n,$$

где $(\lambda'_1, \dots, \lambda'_n)$ — длины *столбцов* диаграммы Юнга λ .

Разбиение λ' называется *двойственным* к разбиению λ .

2.3. Докажите, что

$$e_k = \det(h_{1-i+j})_{i,j=1}^k, \quad h_k = \det(e_{1-i+j})_{i,j=1}^k.$$

2.4. Докажите, что в кольце симметрических функций от n переменных имеет место равенство

$$s_{a+1,1^b} = h_{a+1}e_b - h_{a+2}e_{b-1} + h_{a+3}e_{b-2} - \dots + (-1)^{n-1}h_{a+n},$$

где $(a+1, 1^b)$ — разбиение, диаграмма Юнга которого является крюком с «рукой» и «ногой» длины a и b соответственно.

* * *

2.5. Используя теорему Литтлвуда, найдите коэффициент перед $x_1^2 x_2^3 x_3 x_4^4 x_5^3$ в функции Шура $s_{(5,4,3,1)}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$.

2.6. Докажите, что s_λ получается из m_λ прибавлением суммы мономиальных симметрических функций m_μ , где μ пробегает множество разбиений из того же числа клеточек, что λ , лексикографически меньших λ . Выведите отсюда, что s_λ образуют базис в пространстве симметрических функций.