

Семинар 1

1.1. Пусть $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$. Вычислите многочлен Шура $s_\lambda(x_1, x_2)$.

1.2. Выразите h_k через e_k при $k \leq 5$.

1.3. Пусть $p_k = x_1^k + \dots + x_n^k$ — *ньютоновские степенные суммы*.

а) Докажите, что $\frac{d}{dt} \ln E(t) = \sum_{k \geq 1} (-1)^{k+1} p_k t^{k-1}$.

б) Докажите, что

$$p_k - e_1 p_{k-1} + e_2 p_{k-2} + \dots + (-1)^{k-1} e_{k-1} p_1 + (-1)^k k e_k = 0.$$

(Мы считаем, что $e_k = 0$ при $k > n$).

1.4. Докажите следующие детерминантные тождества:

$$\begin{aligned} \text{а) } p_k &= \begin{vmatrix} e_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2e_2 & e_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (k-1)e_{k-1} & e_{k-2} & e_{k-3} & \dots & e_1 & 1 \\ ke_k & e_{k-1} & e_{k-2} & \dots & e_2 & e_1 \end{vmatrix}; \\ \text{б) } k! \cdot e_k &= \begin{vmatrix} p_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ p_2 & p_1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{k-1} & p_{k-2} & p_{k-3} & \dots & p_1 & k-1 \\ p_k & p_{k-1} & p_{k-2} & \dots & p_2 & p_1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

1.5. Пусть $a_{\lambda\mu}$ — число матриц размера $n \times n$ с коэффициентами 0 или 1, сумма элементов по строкам и столбцам в которых равна соответственно λ и μ (например, если $\lambda = \mu = (1, \dots, 1)$, то $a_{\lambda\mu} = n!$).

а) Докажите, что

$$e_\lambda = \sum_{\mu} a_{\lambda\mu} m_\mu.$$

б) Проверьте, что если $a_{\lambda\mu} > 0$, то $\mu < \lambda^*$.

1.6 (формулы Пьери). **а)** Выведите из определения многочленов Шура, что

$$s_\lambda e_k = \sum_{\mu \in \lambda \otimes 1^k} s_\mu, \quad s_\lambda h_k = \sum_{\mu \in \lambda \otimes k} s_\mu,$$

где $\lambda \otimes 1^k$ и $\lambda \otimes k$ — диаграммы Юнга, получающиеся из λ добавлением k квадратиков, никакие два из которых не лежат в одном столбце (соотв. в одной строке).

б) Куда инволюция $\omega: e_k \mapsto h_k$ переводит функцию Шура s_λ ?