

Программа экзамена 25.06.2018

На экзамене каждому сдающему сначала будет предложено привести три определения или формулировки теорем из указанного списка (без подготовки). Ответивший не менее чем на два вопроса получает билет с двумя теоретическими вопросами и задачей.

Каждый вопрос и задача оцениваются из 3 баллов. За входной тест можно получить дополнительно 1 балл в случае правильного ответа на все три вопроса. Итого максимальная оценка – 10 баллов.

Определения

Нормальная подгруппа; гомоморфизм групп; подгруппа и факторгруппа; свободная абелева группа; циклическая группа; примарная циклическая группа; собственные векторы, собственные подпространства и собственные значения линейного оператора; корневые подпространства линейного оператора; жорданова нормальная форма линейного оператора над алгебраически замкнутым полем; характеристический многочлен линейного оператора; минимальный многочлен линейного оператора; модуль над коммутативным кольцом; гомоморфизм модулей; подмодуль и фактормодуль; евклидово кольцо; циклический модуль; примарный циклический модуль; подмодуль кручения; билинейная форма; поляризация формы; евклидово пространство; неравенство Коши–Буняковского–Шварца; матрица Грама; сопряженный оператор; симметрические, кососимметрические, ортогональные операторы; полуторалинейная форма; эрмитова форма; эрмитово (унитарное) пространство; эрмитовы, косоэрмитовы, унитарные операторы; симметрический многочлен; элементарные и полные симметрические многочлены; факториальное кольцо; прямое и полупрямое произведение групп; центр группы; коммутант группы; разрешимая группа; простая группа; действие группы на множестве; разрешимость уравнения в радикалах.

Формулировки

Теорема о гомоморфизме групп; китайская теорема об остатках; теорема о жордановой нормальной форме оператора; теорема Гамильтона–Кэли; теорема о гомоморфизмах модулей; теорема о взаимных базисах для модулей; теорема о классификации конечнопорожденных модулей над евклидовым кольцом; основная теорема о симметрических многочленах; три теоремы Силова;

Теоретические вопросы

1. Докажите критерий диагонализуемости оператора в терминах характеристического многочлена.
2. Докажите, что пространство, на котором задан оператор, раскладывается в прямую сумму своих корневых подпространств.
3. Докажите, что пространство с нильпотентным оператором раскладывается в прямую сумму циклических подпространств.
4. Докажите, что в жордановой нормальной форме набор размеров жордановых клеток для каждого собственного значения определен однозначно.
5. Докажите теорему Гамильтона–Кэли.
6. Докажите, что подмодуль свободного модуля над евклидовым кольцом — свободный модуль, ранг которого не превосходит ранг исходного модуля.
7. Докажите теорему о взаимных базисах для конечнопорожденных модулей над евклидовыми кольцами.
8. Докажите единственность разложения конечнопорожденного модуля над евклидовым кольцом в прямую сумму свободного и примарных циклических.

9. Выведите теорему о жордановой нормальной форме из теоремы о структуре конечнопорожденных модулей над евклидовым кольцом.
10. Докажите критерий разложимости пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения (относительно произвольной симметрической или кососимметрической формы).
11. Опишите канонический вид ортогонального преобразования в евклидовом пространстве.
12. Опишите канонический вид кососимметрического преобразования ($\text{char } \mathbb{K} \neq 2$).
13. Докажите разрешимость уравнения $\mathcal{A}^2 = \mathcal{C}$, где $\mathcal{C}$ — симметрический оператор с положительными собственными значениями.
14. Докажите существование и единственность полярного разложения для невырожденного оператора (над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ — на выбор).
15. Докажите диагонализуемость эрмитова и косоэрмитова оператора.
16. Докажите диагонализуемость унитарного оператора.
17. Докажите существование выражения симметрического многочлена через элементарные симметрические.
18. Докажите единственность выражения симметрического многочлена через элементарные симметрические.
19. Докажите лемму Гаусса: если многочлен неприводим над факториальным кольцом A , то он неприводим и над $\text{Quot } A$.
20. Докажите факториальность кольца многочленов над факториальным кольцом (леммой Гаусса можно пользоваться без доказательства).
21. Найдите группу автоморфизмов группы $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
22. Докажите, что коммутант есть наименьшая нормальная подгруппа, фактор по которой абелев.
23. Вычислите коммутанты групп S_n и A_n .
24. Докажите порождённость группы $\text{SL}_n(K)$ трансвекциями, и найдите ее коммутант.
25. Докажите, что группа разрешима тогда и только тогда, когда её нормальная подгруппа и факторгруппа разрешимы.
26. Докажите нетривиальность центра p -группы.
27. Докажите разрешимость p -группы и коммутативность группы порядка p^2 .
28. Докажите первую теорему Силова.
29. Докажите вторую теорему Силова.
30. Докажите третью теорему Силова.
31. Докажите простоту группы A_5 .
32. Докажите, что уравнение $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ разрешимо в радикалах.