

Задачи для подготовки к экзамену.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

1. ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА, ОПЕРАТОРЫ И МАТРИЦЫ

Задача 1. Умножение на комплексное число z задаёт преобразование вещественной плоскости:

$$M_z : w \mapsto z \cdot w.$$

Представьте M_{1+i} в виде композиции поворота и гомотетии. Выпишите матрицу преобразования M_{1+i} (рассматриваемого как линейный оператор на $\mathbb{R}^2$) в стандартном базисе.

Задача 2. Пусть V — вещественное векторное пространство всех вещественных функций на отрезке $[0, 1]$. Являются ли функции x^3 , $\sin(x)$, $\cos(x)$ и e^x линейно независимыми в V ?

Задача 3. Рассмотрим кольцо многочленов $\mathbb{R}[x]$ как вещественное векторное пространство. Представьте вектор $x^4 - 4x^3 + 3$ как линейную комбинацию векторов $(x-1)$, $(x-1)^2$, $(x-1)^4$.

Задача 4. Рассмотрим поле $\mathbb{R}$ как векторное пространство над $\mathbb{Q}$. Являются ли векторы 1 , $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ линейно независимыми?

Задача 5. Для $\alpha \in \mathbb{C}$ обозначим через $\mathbb{Q}(\alpha)$ минимальное по включению подполе в $\mathbb{C}$, содержащее α . Найдите базис в $\mathbb{Q}(\alpha)$ (рассматриваемом как векторное пространство над $\mathbb{Q}$), если:

(а) $\alpha = i$; (б) $\alpha = \sqrt[3]{2}$; (в) $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$; (г) $\alpha = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$; (д) $\alpha = \pi$

Выпишите матрицу оператора умножения на α в найденном базисе.

Задача 6. Пусть $\mathbb{F} \subset \mathbb{C}$ — минимальное подполе, содержащее все корни многочлена $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$. Найдите размерность поля $\mathbb{F}$ как векторного пространства над $\mathbb{Q}$, если:

(а) $x^2 - 2$; (б) $x^3 - 2$; (в) $x^4 + 4$; (г) $x^4 + 1$; (д) $x^4 - 2$.

Задача 7. Пусть $f = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Постройте базис над $\mathbb{R}$ в векторном пространстве $\mathbb{R}[x]/(f)$. Выпишите матрицу оператора умножения на x в найденном базисе.

Задача 8. Выпишите матрицу оператора дифференцирования на пространстве многочленов степени не выше 3 в базисе $\{1, x, x^2, x^3\}$.

Задача 9. Пусть V — вещественное векторное пространство полиномиальных функций на $\mathbb{R}$ степени не выше два. Для каждого $a \in \mathbb{R}$ определим оператор сдвига $T_a : V \rightarrow V$ формулой:

$$(T_a f)(x) = f(x + a).$$

Выпишите матрицу оператора T_a в базисе $\{1, x, x^2\}$.

2. СОБСТВЕННЫЕ ЧИСЛА, ВЕКТОРЫ И КАНОНИЧЕСКИЕ ФОРМЫ ОПЕРАТОРОВ

Задача 10. Пусть $A : V \rightarrow V$ — линейный оператор на векторном пространстве V , такой что $A^2 = A$. Докажите, что $V = \text{Ker}(A) \oplus \text{Im}(A)$, причём оператор A при ограничении на $\text{Im}(A)$ действует как тождественный оператор.

Задача 11. Найдите определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}.$$

Задача 12. Для каждого $\varphi \in \mathbb{R}$ найдите собственные числа и собственные векторы оператора на $\mathbb{C}^2$, заданного в стандартном базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Задача 13. Найдите явную формулу, выражающую n -ое число Фибоначчи через n .

Задача 14. Некоторый оператор T на векторном пространстве удовлетворяет уравнению

$$T^2 - 5T + 6I = 0.$$

где I — тождественный оператор. Чему могут быть равны собственные значения оператора T ?

Задача 15. Вычислите коэффициенты матрицы

$$\left(\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)^{10}$$

с точностью до второго знака после запятой включительно.

Задача 16. Пусть $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ — многочлен, а A — вещественная 2×2 -матрица с собственными значениями λ_1 и λ_2 .

(а) Докажите, что если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то

$$f(A) = f(\lambda_1) \frac{A - \lambda_2 I}{\lambda_1 - \lambda_2} + f(\lambda_2) \frac{A - \lambda_1 I}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

(б) Придумайте аналогичную формулу для случая $\lambda_1 = \lambda_2$.

Задача 17. Существует ли целочисленная 3×3 -матрица A , такая что

(а) $A^3 - 2I = 0$; (б) $A^2 + I = 0$?; (в) $A^4 + 4I = 0$; (г) $A^3 + 2A^2 + 3A + 4I = 0$?

Задача 18. Найдите собственные значения, собственные и корневые подпространства оператора, заданного матрицей

$$(a) \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}; \quad (б) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}; \quad (в) \begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}; \quad (г) \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 19. Пусть V — вещественное векторное пространство полиномиальных функций на $\mathbb{R}$ степени не выше два. Для каждого $a \in \mathbb{R}$ определим оператор $T_a : V \rightarrow V$ формулой:

$$(T_a f)(x) = f(ax + 1).$$

Найдите все собственные и корневые подпространства оператора T_a для каждого $a \in \mathbb{R}$.

Задача 20. Для вещественной 2×2 -матрицы $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ найдите собственные числа и собственные значения оператора M_A на пространстве 2×2 -матриц, действующего по формуле

$$M_A : X \mapsto AX.$$

3. МИНИМАЛЬНЫЙ И ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ МНОГОЧЛЕНЫ

Задача 21. Выразите след и определитель квадратной матрицы через корни её характеристического многочлена.

Задача 22. Найдите формулу, выражающую коэффициенты характеристического многочлена $n \times n$ -матрицы через коэффициенты самой матрицы для

(а) $n = 2$; (б) $n = 3$; (в) произвольного n .

Задача 23. Докажите, что если A — нильпотентный оператор на конечномерном векторном пространстве, а I — тождественный, то $\det(I + A) = 1$.

Задача 24. Верно ли, что если оператор A на конечномерном векторном пространстве имеет два линейно независимых собственных вектора с собственным значением λ , то λ — кратный корень характеристического многочлена оператора A ? Верно ли обратное?

Задача 25. Рассмотрим $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ как векторное пространство над полем $\mathbb{Q}$. Определим оператор $M_a : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ умножения на $a \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ формулой:

$$M_a : x \mapsto ax.$$

Найдите характеристический многочлен оператора M_a для $a = 1 + \sqrt[3]{2}$.

Задача 26. Найдите минимальный и характеристический многочлены оператора в $\mathbb{R}^{10}$, который в некотором базисе записывается “таблицей умножения”, то есть, матрицей 10×10 , у которой на (i, j) -том месте стоит ij .

Задача 27. Докажите, что в n -мерном комплексном векторном пространстве всякий линейный оператор имеет инвариантное подпространство размерности $n - 1$.

Задача 28. Докажите, что в конечномерном вещественном векторном пространстве всякий линейный оператор имеет либо собственный вектор, либо инвариантное подпространство размерности 2.

Задача 29. Характеристический многочлен некоторого оператора равен $(t - 1)^2(t - 2)^2$, а минимальный равен $(t - 1)^2(t - 2)$. Какой вид может иметь жорданова нормальная форма этого оператора?

Задача 30. Может ли вещественная 5×5 матрица A удовлетворять следующим уравнениям

$$(a) (x^2 + 1)^m(x^2 - 1)^n = 0; \quad (б) (x^2 + 1)^m(x^2 + 2)^n = 0; \quad (в) (x^5 - 1)^m = 0$$

для некоторых натуральных m и n ? Если такая матрица существует, то чему может быть равен её минимальный многочлен?

Задача 31. Существует ли матрица, характеристический многочлен которой равен χ , а минимальный μ , где

$$(a) \chi = t^6 - 1, \mu = t^3 - 1$$

- (б) $\chi = (t-1)^2(t-2)^3$, $\mu = (t-1)(t-2)$
 (в) $\chi = (t-1)^5(t-2)^5$, $\mu = (t-1)^2(t-2)^3$

4. Билинейные и квадратичные формы

Задача 32. Найдите размерность вещественного пространства симметрических $n \times n$ матриц с вещественными коэффициентами.

Задача 33. Пусть V пространство вещественных 2×2 матриц. Определим на V форму

$$(A, B) = \frac{1}{2} (\det(A+B) - \det(A) - \det(B))$$

(такая форма называется *смешанным определителем*).

- (а) Докажите, что форма $(\cdot, \cdot)$ билинейна и симметрична.
 (б) Выпишите матрицу формы $(\cdot, \cdot)$ в стандартном базисе.

Задача 34. Докажите, что всякую билинейную форму $b(x, y)$ ранга 1 можно привести к виду $f(x)g(y)$, где $f(x)$ и $g(y)$ — линейные формы. К какому самому простому виду эту форму можно привести заменой базиса?

Задача 35. Определите тип квадрики $x^2 + 4xy + 2xz + z^2 + 3x + z - 6 = 0$.

Задача 36. Найдите нормальный вид квадратичных функций:

- (а) $\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$; (б) $\sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}$.

Задача 37. Докажите, что у положительно определенной квадратичной формы над $\mathbb{R}$ диагональные значения положительны. Верно ли обратное?

Задача 38. Квадратичная форма в некоем ортонормированном базисе в $\mathbb{R}^n$ имеет матрицу с элементами a на диагонали и b вне неё. К какому наиболее простому виду можно её привести, перейдя к другому ортонормированному базису?

5. СИММЕТРИЧЕСКИЕ МНОГОЧЛЕНЫ

Задача 39. Является ли симметрическим многочлен

- (а) $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$ ($n = 2$); (б) $(x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_1 + x_3)$ ($n = 3$);
 (в) $(x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_3 + x_4)(x_1 + x_4)$ ($n = 4$) (г) $x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3$?

Если да, найдите его представление через элементарные симметрические функции.

Задача 40. (а) Найдите сумму чисел, обратных комплексным корням многочлена $x^4 - x^2 - x - 1$.

- (б) Сумма двух корней многочлена $2x^3 - x^2 - 7x + \lambda$ равна 1. Найдите λ .

Задача 41. Постройте базис в вещественном пространстве $S_{n, \leq d}$ симметрических многочленов степени не выше d от n переменных с вещественными коэффициентами, если:

- (а) $n = 2$, $d = 3$; (б) $n = 3$, $d = 2$; (в) n и d — произвольные натуральные.

Задача 42. Найдите многочлен четвёртой степени, корнями которого являются кубы комплексных корней многочлена

$$x^4 - x - 1.$$

Задача 43. Найдите сумму k -тых степеней корней многочлена

$$x^n + \frac{x^{n-1}}{1!} + \frac{x^{n-2}}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

для всех $k \leq n$.

Задача 44. Дана 3×3 -матрица A , и известно, что $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A^2 = \operatorname{tr} A^3 = 3$. Найдите характеристический многочлен матрицы A .

Задача 45. Пусть $x_1, \dots, x_n$ — корни многочлена

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0.$$

Докажите, что любой симметрический многочлен от $x_2, \dots, x_n$ можно представить в виде многочлена от x_1 и коэффициентов $a_1, \dots, a_n$.

6. ДИСКРИМИНАНТЫ И РЕЗУЛЬТАНТЫ

Задача 46. Выразите дискриминант многочлена

$$ax^4 + bx^2 + c$$

через a , b и c .

Задача 47. Выразите через p и q дискриминант многочлена пятой степени

$$x^5 + px + q.$$

Задача 48. (а) Для каких простых чисел p многочлен $x^3 + x^2 - 2x - 1$ имеет кратный корень в поле $\mathbb{F}_p$ из p элементов?

(б) Для каких простых чисел p многочлены $x^3 - 3x^2 + 1$ и $2x^4 - 5x^2 - x - 1$ имеют общий корень в поле $\mathbb{F}_p$ из p элементов?

(в) Пусть $\mathbb{F} \subset \mathbb{C}$ — минимальное подполе, содержащее все корни многочлена $x^3 + 3x + 1$. Найдите размерность поля $\mathbb{F}$ как векторного пространства над $\mathbb{Q}$.

Задача 49. Вычислите дискриминант многочлена $x^n - 1$.

Задача 50. Исключите y из системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^3 = 0 \\ x^3 - xy + y^2 = 0. \end{cases}$$

7. АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ

Задача 51. Найдите факторгруппу $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})/H$, где $H \subset \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ — подгруппа, состоящая из векторов с чётными координатами, сумма которых делится на 3.

Задача 52. Сколько элементов в факторгруппе $\mathbb{Z}^3/H$, где $H \subset \mathbb{Z}^3$ — подгруппа, порождённая векторами $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ и $(0, 1, 1)$?

Задача 53. Найдите факторгруппу $\mathbb{Z}^2/H$, где $H \subset \mathbb{Z}^2$ — подгруппа, порождённая двумя векторами с целочисленными координатами (a, b) и (c, d) .

Задача 54. Определим функцию Эйлера $\varphi(n)$ от натурального аргумента n , как число вычетов по модулю n , которые взаимно просты с n . Докажите, что если m и n взаимно просты, то

$$\varphi(m)\varphi(n) = \varphi(mn).$$

Задача 55. Вычислите $\varphi(p^k)$ для всех простых чисел $p \in \mathbb{N}$ и натуральных k .

Задача 56. Пусть $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ — группа всех обратимых вычетов по модулю n относительно умножения.

(а) Докажите, что $|(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*| = \varphi(n)$, где $\varphi(n)$ — функция Эйлера.

(б) Докажите, что если m и n взаимно просты, то $(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^* \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$.

(в)* При каких n группа $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ является циклической?

Задача 57. (а) Проверьте, что группа $(\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})^*$ ненулевых вычетов по модулю 17 относительно умножения является циклической, предъявив образующую этой группы.

(б)* Докажите, что правильный 17-угольник можно построить циркулем и линейкой.

Задача 58. Найдите все пары изоморфных групп в следующем списке:

$$(1) ((\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^*, \times); \quad (2) ((\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^*, \times); \quad (3) (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +);$$

$$(4) (\mathbb{Q}^*, \times); \quad (5) (\mathbb{Q}, +); \quad (6) (\mathbb{R}^+, \times); \quad (7) (\mathbb{R}, +).$$

8. ГРУППЫ ДВИЖЕНИЙ И ПЕРЕСТАНОВОК

Задача 59. (а) Пусть G — конечная подгруппа группы движений плоскости. Докажите, что все элементы $g \in G$ имеют общую неподвижную точку x (то есть $g(x) = x$ для каждого $g \in G$).

(б) Классифицируйте все конечные подгруппы в группе движений плоскости.

Задача 60. Докажите, что группа вращений трёхмерного пространства, сохраняющих данный куб, изоморфна S_4 .

Задача 61. Разложите перестановку

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 8 & 5 & 9 & 7 & 4 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

в произведение непересекающихся циклов.

Задача 62. Найдите все нормальные подгруппы в группе симметрий

(а) правильного шестиугольника; (б) тетраэдра; (в) куба.

Задача 63. Найдите все нормальные подгруппы в группах S_3 , S_4 и S_5 .

Задача 64. (а) Опишите все перестановки в S_n , которые могут быть разложены в произведение (возможно пересекающихся) циклов длины три.

(б) При каких k в группе S_n найдётся перестановка с числом инверсий равным k ?

Задача 65. Пусть G — группа вращений трёхмерного пространства, сохраняющих правильный додекаэдр.

(а) Рассмотрим три действия группы G : на множестве вершин, рёбер и граней додекаэдра. Для каждого действия найдите все орбиты и стабилизаторы.

(б) Найдите порядок группы G .

(в) Докажите, что G изоморфна A_5 .

9. АБСТРАКТНЫЕ ГРУППЫ

Задача 66. Группа из восьми элементов действует на множестве из семи элементов. Сколько неподвижных точек может быть у такого действия?

Задача 67. В группе G нечётно порядка есть нормальная подгруппа N порядка 5. Докажите, что N лежит в центре группы G .

Задача 68. Найдите все конечные группы (с точностью до изоморфизма), в которых есть ровно два класса сопряжённости.

Задача 69. Докажите, что группа порядка 35 циклическая.

Задача 70. Докажите, что группа порядка p^n , где p — простое число, имеет нетривиальный центр.

Задача 71. Пусть $A, B \subset G$ — две нормальные подгруппы в группе G , такие что $A \cap B = \{e\}$.

- (а) Докажите, что $ab = ba$ для любых элементов $a \in A, b \in B$.
- (б) Докажите, что если $G = AB$, то $G \simeq A \times B$.

10. ГРУППЫ АВТОМОРФИЗМОВ

Задача 72. Рассмотрим действие группы $GL_2(\mathbb{C})$ сопряжениями на 2×2 -матрицах:

$$(g, A) \mapsto gAg^{-1}.$$

Опишите все орбиты этого действия.

Задача 73. (а) Найдите центр группы $GL_n(\mathbb{F})$, где $\mathbb{F}$ — поле.

(б) Найдите порядок группы $PGL_n(\mathbb{F}_q)$ (=факторгруппа $GL_n(\mathbb{F})$ по центру), где $\mathbb{F}$ — конечное поле из q элементов.

Задача 74. Найдите группы (а) $PGL_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$; (б) $PGL_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$; (в) $PGL_2(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$.

Задача 75. Пусть p — простое число, а $G = GL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

- (а) Найдите нормальную неабелеву подгруппу в G , отличную от G .
- (б) Найдите число элементов порядка 2 в G .
- (в) Чему может быть равен порядок элемента из G ?
- (г) Найдите число классов сопряжённости в G .

Задача 76. Обозначим через $\text{Aut}(G)$ группу всех автоморфизмов группы G . Групповая операция на $\text{Aut}(G)$ — композиция. Постройте изоморфизмы:

- (а) $\text{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$;
- (б) $\text{Aut}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \simeq GL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ для простого p ;
- (в) $\text{Aut}(S_3) \simeq S_3$;
- (г) $\text{Aut}(S_n) \simeq S_n$ при $n \neq 6$.