

Кольца, поля, алгебры...

Задача 1. Докажите, что: а) $\mathbb{Z}[i]/(2)$ не является полем;

б) $\mathbb{Z}[i]/(3)$ является полем из девяти элементов;

в) $\mathbb{Z}[i]/(n)$ является полем тогда и только тогда, когда $n \in \mathbb{N}$ — простое число, не равное сумме квадратов двух целых чисел.

Задача 2. Докажите, что кольцо $\mathbb{C}[x, y]/(x^2 + y^2 - 1)$ не изоморфно $\mathbb{C}[x]$, но его поле частных изоморфно $\mathbb{C}(x)$.

УКАЗАНИЕ. Синус и косинус рационально выражаются через тангенс половинного угла.

Задача 3. Докажите, что любое кольцо, заключённое между кольцом главных идеалов A и его полем частных, само является кольцом главных идеалов.

Задача 4. Верно ли, что конечное коммутативное кольцо без делителей нуля всегда является полем?

Задача 5. Пусть $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ — алгебра многочленов. Предположим, что $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. Докажите, что:

а) Отображение φ , при котором $\varphi(g(x_1, \dots, x_n)) \mapsto g(f_1, \dots, f_n)$, является эндоморфизмом (гомоморфизмом в себя) $\mathbb{C}$ -алгебры $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$.

б) Если при этом φ — автоморфизм (т.е. взаимно-однозначное отображение), то *якобиан*

$$J = \det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)$$

является ненулевой константой.

в) Если $h = h(x_2, \dots, x_n)$, то отображение Ψ , при котором

$$\Psi(g(x_1, \dots, x_n)) = g(x_1 + h, x_2, \dots, x_n),$$

является автоморфизмом алгебры $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$.

Задача 6. Пусть $\mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]]$ — алгебра формальных степенных рядов. Предположим, что $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]]$ необратимы (т.е. имеют нулевые свободные члены). Докажите, что:

а) Отображение φ , при котором $\varphi(g(x_1, \dots, x_n)) \mapsto g(f_1, \dots, f_n)$, является эндоморфизмом $\mathbb{C}$ -алгебры $\mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]]$.

б) φ — автоморфизм тогда и только тогда, когда якобиан

$$J = \det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)$$

имеет ненулевой свободный член.

Предупреждение. Не пытайтесь решить задачу, обратную к задаче 5 б). Это может привести к моральной травме.

Задача 7. Рассмотрим кольцо чисел Эйзенштейна $\mathbb{Z}[\rho]$, состоящего из комплексных чисел вида $a + b\rho \in \mathbb{C}$, где $\rho = \frac{i\sqrt{3}-1}{2}$, $a, b \in \mathbb{Z}$.

- а) Введите в нём норму и докажите, что $\mathbb{Z}[\rho]$ является евклидовым.
- б) Докажите, что целое простое число $p \in \mathbb{Z}$ является простым в кольце чисел Эйзенштейна $\mathbb{Z}[\rho]$ тогда и только тогда, когда кольцо $\mathbb{F}_p[x]/(x^2 + x + 1)$ является полем.
- в*) Докажите, что из натуральных чисел простыми числами Эйзенштейна являются только простые вида $p = 6k - 1$ и $p = 2$.
- г*) Найдите количество целочисленных решений уравнения $x^2 - xy + y^2 = n$ в зависимости от $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 8*. Докажите, что кольцо $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-19}}{2}]$ является кольцом главных идеалов, но не евклидово.

Билинейные формы

Определение. Пусть на векторных пространствах V и V' над полем $\mathbb{K}$, где $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$, заданы невырожденные симметрические билинейные формы α и α' соответственно. Линейное отображение $A: V \rightarrow V'$ называется *изометрией*, если $\alpha'(Av, Aw) = \alpha(v, w)$; пространства V и V' в таком случае называются *изометричными*. Цель следующей задачи – доказать *теорему Витта*.

Теорема Витта. Пусть V и V' – изометричные пространства (с заданными формами α и α'), $U \subset V$ и $U' \subset V'$ – подпространства в них, и $A_U: U \rightarrow U'$ – изометрия этих подпространств. Тогда существует такая изометрия $A: V \rightarrow V'$, что $A|_U = A_U$. Иными словами, данная изометрия подпространств продолжается до изометрии охватывающих пространств.

Задача 9. Докажите теорему Витта, проделав следующие шаги:

- а) Докажите, что если U вырождено, то существует такое подпространство $\bar{U}$, где $U \subset \bar{U} \subset V$ и $\dim \bar{U} = \dim U + 1$, и линейное отображение $\bar{A}_{\bar{U}}: \bar{U} \rightarrow V'$, продолжающее A_U , для которого $\bar{A}_{\bar{U}}: \bar{U} \rightarrow A_{\bar{U}}(\bar{U})$ является изометрией. (Т.е. изометрию можно продолжить с вырожденного подпространства).
- б) Пусть $V = V'$, и пусть $U \subset V$, $U = \mathbb{K} \cdot u$ – неизотропная прямая (т.е. $\alpha(u, u) \neq 0$). Положим $u' = A_U u$. Тогда теорема Витта справедлива для подпространства U .

УКАЗАНИЕ. В качестве кандидатов на изометрию рассмотрите отражения относительно векторов $u \pm u'$.

- в) Пусть $V = V'$ и $\dim U \geq 2$. Докажите теорему Витта, воспользовавшись ортогональным разложением и индукцией по $\dim U$.

Пусть Γ – граф с конечным числом вершин $\{1, \dots, n\}$. Построим по нему квадратичную

форму на $\mathbb{R}^n$:

$$q_\Gamma(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i \sim j} x_i x_j,$$

где вторая сумма берется по множеству всех ребер графа Γ . Наша цель — выяснить, для каких графов Γ форма q_Γ является положительно определенной.

Задача 10. Если $q_\Gamma > 0$, то граф Γ

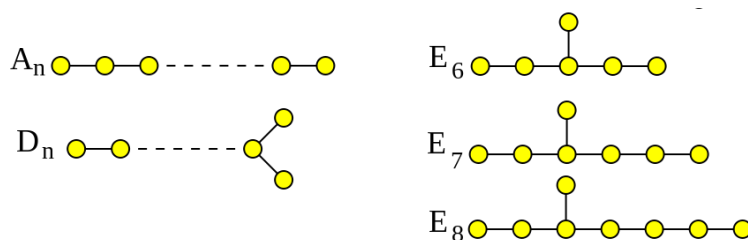
- а) не содержит циклов (в частности, петель и кратных ребер);
- б) не содержит вершин степени 4 и больше;
- в) содержит не более одной вершины степени 3.

Задача 11*. Пусть Γ — граф с вершиной степени 3, из которой выходят три «щупальца» длин p , q и r . Покажите, что если $q_\Gamma > 0$, то

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{r+1} > 1.$$

Перечислите все тройки (p, q, r) , удовлетворяющие этому неравенству.

Задача 12*. Убедитесь, что все графы, для которых $q_\Gamma > 0$, перечислены на рисунке. Они называются *диаграммами Дынкина*¹ и обозначаются A_n ($n \geq 1$), D_n ($n \geq 4$), E_6 , E_7 и E_8 . Для каждой из диаграмм Дынкина Γ найдите $\det q_\Gamma$.



Симметрические многочлены

Напомним, что через s_k обозначаются *ньютоновские степенные суммы*: $s_k = x_1^k + \dots + x_n^k$.

Задача 13. Рассмотрим многочлен $E(t) = (1 + x_1 t) \dots (1 + x_n t) = \sum_{k=0}^n e_k t^k$ от переменных $x_1, \dots, x_n, t$.

- а) Докажите, что $\frac{d}{dt} \ln E(t) = \sum_{k \geq 1} (-1)^{k+1} s_k t^{k-1}$.
- б) Докажите, что

$$s_k - e_1 s_{k-1} + e_2 s_{k-2} - \dots + (-1)^{k-1} e_{k-1} s_1 + (-1)^k e_k = 0.$$

(Мы считаем, что $e_k = 0$ при $k > n$).

Задача 14. Докажите следующие детерминантные тождества:

¹Точнее, *диаграммами Дынкина с простыми связями* (simply-laced)

$$\text{а) } s_k = \begin{vmatrix} e_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2e_2 & e_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (k-1)e_{k-1} & e_{k-2} & e_{k-3} & \dots & e_1 & 1 \\ ke_k & e_{k-1} & e_{k-2} & \dots & e_2 & e_1 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } k! \cdot e_k = \begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{k-1} & s_{k-2} & s_{k-3} & \dots & s_1 & k-1 \\ s_k & s_{k-1} & s_{k-2} & \dots & s_2 & s_1 \end{vmatrix}.$$

Задача 15. а) Дайте определение кососимметрического многочлена и докажите, что определитель Вандермонда $\Delta(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i < j} (x_i - x_j)$ является таковым.

б) Докажите, что всякий кососимметрический многочлен есть произведение симметрического и $\Delta(x_1, \dots, x_n)$.

в) Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — симметрический многочлен, равный 0 при $x_i = x_j$. Докажите, что $f(x_1, \dots, x_n) = \Delta^2 \cdot g(x_1, \dots, x_n)$, где g — симметрический многочлен.

Определение. Разбиением числа n называется набор λ целых неотрицательных чисел $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, где $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ и $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = n$.

Задача 16. Пусть $p(n)$ — число разбиений числа n . Докажите, что $\prod_{m \geq 0} (1 - t^m)^{-1} = \sum_{n \geq 0} p(n) t^n$.

Определение. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — набор натуральных чисел. Пусть $a_\alpha = \begin{vmatrix} x_1^{\alpha_1} & \dots & x_n^{\alpha_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^{\alpha_n} & \dots & x_n^{\alpha_n} \end{vmatrix}$.

В частности, если $\delta = (n-1, n-2, \dots, 1, 0)$, то a_δ — это определитель Вандермонда.

Задача 17. Докажите, что a_α , где α — строго убывающий набор, образуют базис в пространстве кососимметрических многочленов.

Задача 18 (Многочлены Шура). Пусть λ — разбиение. Положим $s_\lambda(x_1, \dots, x_n) = a_{\lambda+\delta}/a_\delta$. Докажите, что:

- а)** $s_\lambda(x_1, \dots, x_n)$ — целочисленный симметрический многочлен;
- б)** $s_\lambda(x_1, \dots, x_n)$ при всевозможных λ образуют базис векторного пространства симметрических многочленов от $x_1, \dots, x_n$;
- в)** Если $\lambda = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ (k единиц), то $s_\lambda(x_1, \dots, x_n) = e_k$;
- г)** Если $\lambda = (k, 0, \dots, 0)$, то $s_\lambda(x_1, \dots, x_n) = h_k$.

Задача 19. Выпишите явно многочлены Шура при $n = 2$ и $n = 3$ для всевозможных разбиений **а)** числа 3; **б)** числа 4.

Задача 20. Докажите, что $s_\delta = \prod_{i < j} (x_i + x_j)$.

Задача 21* (Формулы Коши). Докажите тождества:

- а)** $\prod_{i,j=1}^n (1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_{\lambda} s_\lambda(x_1, x_2, \dots) s_\lambda(y_1, y_2, \dots)$;
- б)** $\prod_{i,j=1}^n (1 + x_i y_j) = \sum_{\lambda} s_\lambda(x_1, x_2, \dots) s_{\lambda^*}(y_1, y_2, \dots)$, где λ^* — разбиение, сопряжённое к λ . (При этом λ пробегает множество диаграмм Юнга из не более чем n строк).

Задача 22* (Формулы Пьери). Пусть λ — разбиение (будем представлять его как диаграмму Юнга). Обозначим через $\lambda \otimes k$ (соотв. $\lambda \otimes 1^k$) множество разбиений, полученных из данного добавлением к соответствующей диаграмме Юнга k клеточек, из которых никакие две не лежат в одном столбце (соотв. в одной строке). Докажите, что:

$$\text{а) } s_\lambda e_k = \sum_{\mu \in \lambda \otimes 1^k} s_\mu; \quad \text{б) } s_\lambda h_k = \sum_{\mu \in \lambda \otimes k} s_\mu.$$

Задача 23* (Формулы Якоби–Труди). Пусть λ — разбиение с не более чем n ненулевыми компонентами. Докажите, что:

$$\text{а) } s_\lambda = \det(h_{\lambda_i - i + j})_{1 \leq i, j \leq n}; \quad \text{б) } s_{\lambda^*} = \det(e_{\lambda_i - i + j})_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Автоморфизмы групп перестановок

Задача 24. Докажите, что всякая простая группа порядка 60 изоморфна $\mathfrak{A}_5$.

Задача 25. Покажите, что если $n \geq 3$ и $n \neq 6$, то всякий автоморфизм группы $\mathfrak{S}_n$ является внутренним.

УКАЗАНИЕ. Автоморфизм, переводящий транспозиции в транспозиции, внутренний.

Задача 26. Пусть H — подгруппа индекса 6 в $\mathfrak{S}_6$. Тогда действие $\mathfrak{S}_6$ на $\mathfrak{S}_6/H$ задает гомоморфизм $\mathfrak{S}_6 \rightarrow \mathfrak{S}_6$.

а) Покажите, что это автоморфизм.

б) Докажите, что любая подгруппа индекса 6 в $\mathfrak{S}_6$ изоморфна $\mathfrak{S}_5$.

Задача 27. Докажите следующие утверждения:

а) Действие группы $\text{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ на $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_5)$ задает вложение $\text{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ в $\mathfrak{S}_6$.

б) $\text{PGL}_2(K)$ действует на $\mathbb{P}^1(K)$ транзитивно.

в) Вложение из пункта а) не совпадает ни с одним из 6 «стандартных» вложений $\mathfrak{S}_5$ из $\mathfrak{S}_6$, а соответствующий автоморфизм из предыдущей задачи не является внутренним.

г) Куда этот автоморфизм переводит транспозицию?

Задача 28. а) Докажите, что группа *внешних автоморфизмов* $\text{Out } \mathfrak{S}_6 = \text{Aut } \mathfrak{S}_6 / \text{Inn } \mathfrak{S}_6$ изоморфна $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (то есть построенный в предыдущей задаче автоморфизм $\mathfrak{S}_6$ единственен с точностью до внутреннего автоморфизма).

б) Верно ли, что $\text{Aut } \mathfrak{S}_6 = \text{Inn } \mathfrak{S}_6 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$?

Инвариант Дена

Этот раздел посвящён применению тензорного произведения в народном хозяйстве. Напомним, что классическая теорема Бойяи–Гервина утверждает, что любые два многоугольника равной площади равноставлены (один из них всегда можно разрезать на части, из которых можно сложить второй). Выясним, верно ли аналогичное утверждение в трёхмерном пространстве.

Третья проблема Гильберта. Являются ли куб и правильный тетраэдр равного объема равноставленными (т.е. можно ли куб разрезать на несколько многогранников и сложить из них правильный тетраэдр того же объема)?

Инвариант Дена lite. Прежде чем приступать к третьей проблеме Гильберта, решим следующую задачу: можно ли разрезать прямоугольник 1×2 на конечное число прямоугольников *со сторонами, параллельными сторонам исходного* и сложить из них квадрат $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$, если прямоугольники запрещается поворачивать?

Задача 29. Пусть прямоугольник P имеет стороны a и b . Обозначим через $D(P)$ элемент $a \otimes b$ в тензорном произведении $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$. Докажите следующие утверждения:

- а) Если отрезок разбивает прямоугольник P на два, P_1 и P_2 , то $D(P) = D(P_1) + D(P_2)$.
- б) Инвариант D аддитивен: если прямоугольник P разбит на прямоугольники P_i , то $D(P) = \sum D(P_i)$.
- в) Прямоугольник 1×2 нельзя разрезать на конечное число прямоугольников и сложить из них квадрат $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$. (В этой задаче стороны всех прямоугольников параллельны осям координат.)

Инвариант Дена. Пусть P — многогранник в $\mathbb{R}^3$ (например, выпуклый). Обозначим через ℓ_i длины его ребер, а через α_i величины соответствующих двугранных углов. *Инвариантом Дена* многогранника P называется элемент $\text{Dehn}(P) := \sum \ell_i \otimes \frac{\alpha_i}{\pi}$ пространства $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} (\mathbb{R}/\mathbb{Q})$.

Задача 30. а) Докажите, что если плоскость разбивает многогранник P на два многогранника, P_1 и P_2 , то $\text{Dehn}(P) = \text{Dehn}(P_1) + \text{Dehn}(P_2)$.

- б) Инвариант Дена аддитивен: если многогранник P разбит на многогранники P_i , то $\text{Dehn}(P) = \sum \text{Dehn}(P_i)$ (отсюда следует, в частности, что инварианты Дена у двух равноставленных многогранников совпадают).

Задача 31 (Многочлены Чебышёва). а) Докажите, что $\cos n\varphi$ — многочлен от $\cos \varphi$. Чему равен коэффициент при его старшей степени?

- б) Докажите, что угол $\arccos 1/3$ не является рациональным кратным π .

Задача 32. Решите третью проблему Гильберта.

Историческая справка. Инвариант Дена придумал ученик Гильберта Макс Ден (Max Dehn) в конце XIX — начале XX века (по всей видимости, третья проблема Гильберта была решена еще до того, как Гильберт сформулировал свой список проблем). Через 60 с лишним лет после этого швейцарский математик Жан-Пьер Сидле (Jean-Pierre Sydler) доказал и обратное утверждение: если два многогранника имеют равные объемы и инварианты Дена, то они равноставлены.

Правила игры. Задачи можно сдавать семинаристу или учебному ассистенту вашей группы (список см. на странице курса). Сдавшие 40, 45 или 50 пунктов задач получают оценку 8, 9 или 10 соответственно. Звёздочкой отмечены более сложные (по мнению автора листка) задачи. Сданные задачи должны оказаться в кондуите до 11 июня 2018 г., 23:59.