

Симметрические и ортогональные операторы

Во всех задачах идет речь про стандартное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ с нормой $\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, если не оговорено иное.

9.1. Пусть L — плоскость в $\mathbb{R}^3$, заданная уравнением $x + y + z = 0$.

- а) Опишите изоморфизм $L \rightarrow L^*$, индуцированный стандартной евклидовой нормой.
- б) Опишите в L^* аннулятор прямой $\mathbb{R} \cdot (1, -2, 1) \subset L$.
- в) То же для евклидовой нормы, построенной по билинейной форме $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + xz$.
- г) Те же вопросы для плоскости, заданной уравнением $x + 2y + 3z = 0$.

9.2. Диагонализуйте в ортонормированном базисе операторы:

- а) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$, г) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

9.3. Приведите к главным осям квадрики:

- а) $x^2 + axy + y^2 = 1$, б) $x^2 + axy = 1$, в) $xy + yz + xz = 1$.

9.4. а) Приведите к канонической форме пару квадратичных форм $x^2 + xy + y^2$ и $x^2 - y^2$ в $\mathbb{R}^2$.

- б) Приведите пример пары неположительно определенных форм, которая не приводится к канонической форме над $\mathbb{R}$.

9.5. Приведите к каноническому виду ортогональную матрицу:

- а) $\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}$.

9.6. а) Докажите, что экспонента кососимметрического оператора $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ является поворотом на a радиан.

- б) Найдите матрицу кососимметрической билинейной формы, сопоставляющей векторам u и $v \in \mathbb{R}^3$ определитель матрицы, составленной из столбцов u, v и a .

в) Пусть S — кососимметрический оператор, соответствующий форме из предыдущего пункта. Докажите, что вектор a сохраняется оператором $\exp(S)$.

- г) Докажите, что $\exp(S)$ — поворот на $|a|$ радиан вокруг вектора a .