

## 23. Двадцать третья лекция, 25 апреля 2018 г.

**23.1. Полупрямое произведение.** Понятие внутреннего автоморфизма позволяет переформулировать определение нормальной подгруппы: подгруппа нормальна тогда и только тогда, когда она инвариантна относительно всех внутренних автоморфизмов.

Пусть  $N$  — нормальная подгруппа в  $G$ ,  $H$  — произвольная подгруппа. Тогда произведение  $NH = \{nh : n \in N, h \in H\}$  является подгруппой. Действительно,

$$\begin{aligned}(n_1 h_1)(n_2 h_2) &= n_1(h_1 n_2 h_1^{-1})h_1 h_2, \\ (nh)^{-1} &= h^{-1}n^{-1} = (h^{-1}n^{-1}h)h^{-1}.\end{aligned}$$

Кроме того,  $NH = HN$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 23.1.** Говорят, что группа  $G$  разлагается в *полупрямое произведение* своих подгрупп  $N$  и  $H$ , если

- (1)  $N$  — нормальная подгруппа;
- (2)  $N \cap H = \{e\}$ ;
- (3)  $NH = G$ .

Обозначение:  $G = N \rtimes H$  (иногда используется другой значок:  $G = N \ltimes H$ ).

Как и в случае прямого произведения, свойства 2) и 3) эквивалентны тому, что каждый элемент из  $G$  единственным образом представляется в виде произведения элементов из  $N$  и  $H$ .

**ПРИМЕР 23.2.**  $S_n = A_n \rtimes \langle (12) \rangle$ .

**ПРИМЕР 23.3.**  $S_4 = V_4 \rtimes \langle S_3 \rangle$ , где  $V_4$  — четверная группа Клейна, а  $S_3$  вложена в  $S_4$  как группа перестановок, оставляющих на месте символ 4.

**ПРИМЕР 23.4.**  $\mathrm{GL}_n(K) = \mathrm{SL}_n(K) \rtimes \{\mathrm{diag}(\lambda, 1, \dots, 1) \mid \lambda \in K^*\}$ .

**23.2. Снова полупрямое произведение групп.** Мы определили разложение группы в полупрямое произведение двух своих подгрупп (одна из которых должна быть нормальной). Можно действовать иначе: для двух групп  $N$  и  $H$  рассмотреть их *внешнее* полупрямое произведение, т.е. построить группу  $G = N \rtimes H$  аналогично тому, как это делалось для прямого произведения. Отличие от прямого произведения состоит в том, что для описания полупрямого произведения необходима дополнительная информация — а именно, нужно задать для каждого элемента из  $H$  нужно задать автоморфизм  $\alpha(h)$  группы  $N$ , которым  $h$  будет действовать на  $N$ . Это соответствие должно быть гомоморфизмом групп  $H \rightarrow \mathrm{Aut} N$ .

Итак, пусть  $N \times H$  — прямое произведение  $N$  и  $H$  как множеств, т.е. множество пар  $(n, h)$ . Пусть также задан гомоморфизм  $\alpha: H \rightarrow \mathrm{Aut} N$ . Определим на множестве  $N \times H$  умножение следующим образом:

$$(n_1, h_1)(n_2, h_2) = (n_1 \alpha(h_1)n_2, h_1 h_2).$$

Обратный элемент к  $(n, h)$  будет определяться так:

$$(n, h)^{-1} = (\alpha(h^{-1})n^{-1}, h^{-1}).$$

Тем самым на  $N \times H$  будет задана структура группы, которая называется *внешним полупрямым произведением*  $N$  и  $H$  и обозначается через  $N \rtimes_{\alpha} H$ . При этой конструкции разным гомоморфизмам  $\alpha$  будут соответствовать, вообще говоря, неизоморфные группы! Так, например, если  $\alpha$  переводит каждый элемент  $H$  в тождественный автоморфизм группы  $N$ , то полученная группа будет прямым произведением групп  $N$  и  $H$ .

Обратно, если группа  $G$  раскладывается в полупрямое произведение своих подгрупп:  $G = N \ltimes H$ , то имеется изоморфизм групп  $N \rtimes_{\alpha} H \rightarrow G$ . (Как при этом будет действовать на  $N$  автоморфизм  $\alpha(h)$ ?)

**ПРИМЕР 23.5.** Рассмотрим две циклические группы:  $\langle a \rangle_n = \mathbb{Z}_n$  и  $\langle b \rangle_m = \mathbb{Z}_m$ . Гомоморфизм  $\langle b \rangle_m \rightarrow \text{Aut } \mathbb{Z}_n$  полностью определяется тем, как действует образующая  $b$ . Как обсуждалось на прошлой лекции,  $\text{Aut } \mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_n^*$ , поэтому всякий автоморфизм  $\mathbb{Z}_n$  есть возведение элемента  $a$  в некоторую степень  $k$ . Таким образом, задать гомоморфизм  $\langle b \rangle_m \rightarrow \mathbb{Z}_n$  значит задать такое  $k$ , что  $k^m \equiv 1 \pmod n$ . Такое полупрямое произведение обозначается через  $\langle a \rangle_n \rtimes_k \langle b \rangle_m$ . Вообще говоря, при различных  $k$  эти группы могут оказаться изоморфными.

В частности, если  $(\varphi(n), m) = 1$ , то  $k = 1$ , и всякий такой гомоморфизм  $\alpha$  тривиален, т.е. в этом случае не бывает полупрямых произведений  $\mathbb{Z}_n$  и  $\mathbb{Z}_m$ , отличных от прямого произведения.

**ПРИМЕР 23.6.** Рассмотрим группу  $\langle a \rangle_n \rtimes_{-1} \langle b \rangle_2$ . Она задаётся соотношениями  $a^n = b^2 = 1$  и  $bab^{-1} = a^{-1}$ . Поэтому это группа самосовмещений  $n$ -угольника.

**23.3. Коммутант.** Пусть  $x, y \in G$  — два элемента группы. Их *коммутатором* называется элемент  $(x, y) = xyx^{-1}y^{-1}$ . Очевидны следующие свойства коммутатора:

- (1)  $(x, y) = e$  тогда и только тогда, когда  $x$  и  $y$  коммутируют.
- (2)  $(x, y)^{-1} = (y, x)$  (обратный к коммутатору элемент снова является коммутатором).

Напротив, произведение двух коммутаторов не обязано быть коммутатором.

Все коммутаторы порождают подгруппу в  $G$ , которая называется *коммутантом* группы  $G$  (или, реже, её *производной группой*) и обозначается через  $G'$ :

$$G' := \langle (x, y) \mid x, y \in G \rangle.$$

Ясно, что  $G' = \{e\}$  тогда и только тогда, когда  $G$  абелева.

Пусть  $\varphi: G \rightarrow H$  — гомоморфизм групп. Поскольку  $\varphi((x, y)) = (\varphi(x), \varphi(y))$ , то  $\varphi(G') \subset H'$ . Если  $\varphi$  к тому же является эпиморфизмом, то  $\varphi(G') = H'$ .

Теперь возьмём в качестве  $H$  саму  $G$ , а в качестве  $\varphi$  — какой-нибудь её внутренний автоморфизм. Получается, что  $\varphi(G') = G'$ . Это значит, что  $G'$  — подгруппа, инвариантная относительно всех внутренних автоморфизмов. Значит, она нормальна в  $G$ .

**ТЕОРЕМА 23.7.** *Всякая подгруппа  $H \subset G$ , содержащая  $G'$ , нормальна. При этом факторгруппа  $G/H$  абелева (в частности,  $G/G'$  тоже абелева). Обратно, если  $H$  — такая нормальная подгруппа в  $G$ , что  $G/H$  абелева, то  $G'$  содержится в  $H$ . Другими словами,  $G'$  — наименьшая нормальная подгруппа в  $G$ , факторгруппа по которой абелева.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $H \supset G'$ . Пусть  $h \in H$ ,  $g \in G$ . Тогда

$$ghg^{-1} = ghg^{-1}h^{-1}h = (g, h) \cdot h \in G' \cdot H \subset H,$$

поэтому  $H \triangleleft G$ .

Далее, пусть  $H$  — нормальная подгруппа в  $G$ , и  $g_1, g_2 \in G$ . Докажем, что  $g_1H$  и  $g_2H$  коммутируют, т.е.  $G/H$  коммутативна, тогда и только тогда, когда  $G' \subset H$ .

$$(g_1H, g_2H) = g_1Hg_2Hg_1^{-1}Hg_2^{-1}H = g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1}H = (g_1, g_2)H.$$

Если факторгруппа  $G/H$  абелева, то  $(g_1, g_2)H = eH$ , т.е.  $(g_1, g_2) \in H$ . Обратно, если  $(g_1, g_2) \in H$ , то из приведенного равенства получаем, что элементы факторгруппы  $g_1H$  и  $g_2H$  коммутируют. Теорема доказана.  $\square$

**23.4. Коммутанты некоторых групп.** Из курса прошлого семестра вам известно следующее

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 23.8.** *Группа чётных перестановок  $A_n$  порождается тройными циклами  $(ijk)$ . При  $n \geq 5$  группа  $A_n$  порождается парами независимых транспозиций  $(ij)(kl)$ .*

**ПРИМЕР 23.9.**  $S'_n = A_n$  при  $n \geq 3$ . Действительно,  $S'_n \subset A_n$ , т.к. группа  $S_3/A_3 \cong \mathbb{Z}_2$  абелева. Далее, найдём  $S'_3$ . Эта группа содержится в  $A_3$ . Но в  $A_3$  нет никакой меньшей подгруппы, кроме единичной, поэтому  $S'_3$  совпадает со всей  $A_3$  (он отличен от  $\{e\}$ , т.к.  $S_3$  некоммутативна).  $A_3$  содержит оба 3-цикла  $(123)$  и  $(132)$ . Поэтому  $S'_n$  содержит всевозможные 3-циклы. Поэтому из предложения 23.8 следует, что  $S'_n = A_n$ .

*E-mail address:* esmirnov@hse.ru