

19. Девятнадцатая лекция, 23 марта 2018 г.

В этой лекции мы завершаем доказательство основной теоремы о симметрических многочленах.

ТЕОРЕМА 19.1 (Основная теорема о симметрических многочленах). *Всякий симметрический многочлен единственным образом представляется в виде многочлена от $e_1, \dots, e_n$. Иначе говоря, для любого симметрического многочлена $f(x_1, \dots, x_n)$ найдётся единственный многочлен $F(X_1, \dots, X_n)$, для которого $f(x_1, \dots, x_n) = F(e_1, \dots, e_n)$.*

ПРОДОЛЖЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19.2. *Старшим членом* многочлена $P(x_1, \dots, x_n)$ (обозначение: $\text{ht } P$) называется самый старший при лексикографическом упорядочении из входящих в него мономов.

ПРИМЕР 19.3. $\text{ht}(2x_1x_3^3 + x_1x_2^2x_3 - x_2x_3^2 + 5x_1^2x_2 - 4x_2) = 5x_1^2x_2$.

ЛЕММА 19.4. *Старший член произведения многочленов равен произведению их старших членов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это следует из свойств лексикографического порядка (предложение 18.9). $\square$

Следующая лемма уже относится к симметрическим многочленам.

ЛЕММА 19.5. *Пусть f — симметрический многочлен. Тогда его старший член $\text{ht } f = u = ax_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$ удовлетворяет неравенствам $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное: пусть $k_i < k_{i+1}$ для некоторого i . Тогда, по определению симметрического многочлена, f должен содержать и моном $ax_1^{k_1} \dots x_i^{k_{i+1}} x_{i+1}^{k_i} \dots x_n^{k_n}$. Но этот моном лексикографически старше, чем u . Противоречие. $\square$

ЛЕММА 19.6. *Пусть $u = x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$. Тогда существуют и однозначно определены числа $\ell_1, \dots, \ell_n$, что старший член многочлена $\sigma_1^{\ell_1} \dots \sigma_n^{\ell_n}$ совпадает с u .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Старший член многочлена σ_k равен $x_1 \dots x_k$. Поэтому старший член многочлена $\sigma_1^{\ell_1} \dots \sigma_n^{\ell_n}$ равен

$$x_1^{\ell_1} (x_1 x_2)^{\ell_2} \dots (x_1 \dots x_n)^{\ell_n} = x_1^{\ell_1 + \dots + \ell_n} x_2^{\ell_2 + \dots + \ell_n} \dots x_n^{\ell_n}.$$

Получаем систему уравнений на ℓ_i :

$$\begin{aligned} \ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_n &= k_1; \\ \ell_2 + \dots + \ell_n &= k_2; \\ &\dots \\ \ell_n &= k_n. \end{aligned}$$

Она имеет единственное решение: $\ell_i = k_i - k_{i+1}$. Лемма доказана. $\square$

Перейдём к доказательству теоремы. Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — симметрический многочлен. Докажем существование такого многочлена $F(X_1, \dots, X_n)$, что $f = F(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$. Пусть $\text{ht } f = u = ax_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$. Согласно предыдущей лемме, существует такой многочлен $F_1(X_1, \dots, X_n)$, что $\text{ht } F(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = u$. Рассмотрим разность этих многочленов:

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = f - F(\sigma_1, \dots, \sigma_n).$$

Если $f_1 = 0$, то всё доказано. Если нет, то пусть $u_2 = \text{ht } f_1$. Ясно, что $u_2 \prec u_1$. Применим к u_2 ту же процедуру: найдём многочлен от $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ со старшим членом u_2 и вычтем его из f_1 , получим многочлен со старшим членом u_3 , и так далее. Мы получим убывающую последовательность мономов

$$u_1 \succ u_2 \succ u_3 \succ \dots$$

Все эти мономы являются старшими членами симметрических многочленов, т.е. удовлетворяют условию леммы 19.5. Значит, все показатели при всех x_i во всех u_j не превосходят показателя при x_1 в мономе u_1 , т.е. k_1 . Таких мономов имеется конечное число. Поэтому процесс оборвётся: на каком-то шаге $u_N = 0$. Тем самым мы получим выражение многочлена f через элементарные симметрические.

ЗАМЕЧАНИЕ 19.7. Это же можно доказать и по-другому: например, согласно предложению 18.6 достаточно рассматривать однородные многочлены, а их пространство конечномерно.

Докажем единственность такого выражения. Предположим противное: пусть найдутся такие многочлены $F(X_1, \dots, X_n)$ и $G(X_1, \dots, X_n)$, что $F(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = G(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$. Положим $H(X_1, \dots, X_n) = F - G$; получаем, что $H(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = 0$.

Покажем, что $H = 0$. Пусть $H_1(X_1, \dots, X_n), \dots, H_s(X_1, \dots, X_n)$ — все ненулевые мономы, входящие в H . Пусть $w_i(x_1, \dots, x_n) = \text{ht } H_i(\sigma_1, \sigma_n)$ — старшие члены многочленов, которые получаются при подстановке σ_k в H_i . Согласно лемме 19.6, среди w_i нет пропорциональных. Выберем среди них старший моном. Пусть это будет w_1 . По построению, w_1 старше всех остальных мономов, входящих в $H_1(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, и всех мономов, входящих в $H_i(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$. Поэтому после приведения подобных слагаемых в сумме

$$H(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = H_1(\sigma_1, \dots, \sigma_n) + \dots + H_s(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$$

член w_1 сохранится, т.к. ему не с кем будет сократиться. Противоречие. Значит, $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ алгебраически независимы. $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 19.8. Действуя аналогично доказательству основной теоремы о симметрических многочленах, покажите, что $h_1, \dots, h_n$ также являются системой алгебраически независимых образующих кольца R^{S_n} .

В следующем пункте мы докажем это утверждение иначе: покажем, что e_k и h_k можно выразить друг через друга.

19.1. Производящие функции. Рассмотрим производящие функции

$$E(t) = \sum_{k=0}^n e_k(x_1, \dots, x_n) t^k \quad \text{и} \quad H(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k(x_1, \dots, x_n) t^k.$$

Согласно теореме Виета, первая из них равна

$$E(t) = \prod_{i=1}^n (1 + x_i t).$$

Легко убедиться, что для $H(t)$ также имеется аналогичное разложение:

УПРАЖНЕНИЕ 19.9. Докажите, что

$$H(t) = \prod_{i=1}^n (1 + x_i t + x_i^2 t^2 + \dots) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - x_i t}.$$

Отсюда получается следующее уравнение на производящие функции:

$$E(t)H(-t) = 1.$$

Это равенство двух формальных степенных рядов. Следовательно, все коэффициенты произведения из левой части, кроме свободного члена, равны нулю. Получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} e_1 - h_1 &= 0; \\ e_2 - e_1 h_1 + h_2 &= 0; \\ e_3 - e_2 h_1 + e_1 h_2 - h_3 &= 0; \\ &\dots \\ e_n - e_{n-1} h_1 + e_{n-2} h_2 + \dots + (-1)^n h_n &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует несколько замечательных выводов. Во-первых, эта система уравнений, рассматриваемая как система относительно $h_1, \dots, h_n$ с коэффициентами из $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$, имеет единственное решение (она верхнетреугольная с единицами на диагонали, так что все h_k также будут многочленами с целыми коэффициентами).

ЗАДАЧА 19.10. Выразите h_k через $e_1, \dots, e_k$.

Во-вторых, она симметрична относительно замены e_k на h_k и наоборот. Это значит, что h_k выражаются через e_ℓ с теми же коэффициентами, с которыми соответствующие e_k выражаются через h_ℓ . Например, если $h_3 = e_3 - e_2 h_1 + e_1 h_2 = e_3 - e_2 e_1 + e_1(e_1^2 - e_2) = e_3 - 2e_1 e_2 + e_1^3$, то и $e_3 = h_3 - 2h_1 h_2 + h_1^3$.

УПРАЖНЕНИЕ 19.11. Убедитесь, что отображение $\omega: e_k \mapsto h_k$ является автоморфизмом кольца симметрических функций; более того, оно инволютивно, т.е. $\omega^2 = Id$. Выведите отсюда результат упражнения 19.8.

E-mail address: esmirnov@hse.ru