

16. Шестнадцатая лекция, 16 марта 2018 г.

В прошлой лекции мы определили три класса операторов в эрмитовом пространстве: эрмитовы, косоэрмитовы и унитарные. Оказывается (и в этом комплексная ситуация оказывается проще вещественной), что эти операторы всегда диагонализуются в ортонормированном базисе.

16.1. Диагонализуемость и собственные значения.

ТЕОРЕМА 16.1. Пусть $\mathcal{A}$ — оператор одного из трех типов: эрмитов, косоэрмитов или унитарный. Тогда

- (1) Если подпространство $U \subset V$ является $\mathcal{A}$ -инвариантным, то $U^\perp$ тоже $\mathcal{A}$ -инвариантно.
- (2) Оператор $\mathcal{A}$ диагонализуем в ортонормированном базисе.
- (3) Если $\mathcal{A}$ эрмитов (соотв. косоэрмитов, унитарен), то все его собственные значения вещественны (соотв. чисто мнимые, равны по модулю 1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) доказывается примерно одинаково во всех трех случаях. Проведем самое сложное из трех рассуждений, для унитарного оператора $\mathcal{A}$.

Итак, докажем, что $\mathcal{A}U^\perp \subset U^\perp$. Возьмем произвольный вектор $w \in U^\perp$ и докажем, что $\mathcal{A}w \in U^\perp$, то есть что $(\mathcal{A}w, u) = 0$ для любого $u \in U$. Оператор $\mathcal{A}$, ограниченный на U , также будет унитарным, а следовательно, невырожденным. Стало быть, вектор $\tilde{u} = \mathcal{A}u \in U$ отличен от нуля. Векторы $\tilde{u}$ и w ортогональны. Поэтому

$$0 = (w, \tilde{u}) = (\mathcal{A}w, \mathcal{A}\tilde{u}) = (\mathcal{A}w, \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}u) = (\mathcal{A}w, u).$$

(во втором равенстве мы воспользовались ортогональностью $\mathcal{A}$). Поэтому $\mathcal{A}w \in U^\perp$, что и требовалось доказать. Случай эрмитова и косоэрмитова операторов разбираются аналогично (проделайте это сами).

(2) доказывается по индукции. При $\dim V = 1$ доказывать нечего. Докажем индуктивный переход: пусть $\dim V = n$. Поскольку $\mathcal{A}$ — оператор на комплексном векторном пространстве, у него есть собственный вектор $v \in V$. Будем считать, что $\|v\| = 1$. Тогда подпространство $U = \langle v \rangle^\perp$ тоже $\mathcal{A}$ -инвариантно в силу пункта (1). Поэтому, согласно предположению индукции, в U существует ортонормированный базис $u_1, \dots, u_{n-1}$, в котором $\mathcal{A}$ диагонален. Но тогда $\mathcal{A}$ диагонален в базисе $u_1, \dots, u_{n-1}, v$ пространства V .

Докажем (3) это для эрмитова оператора. Пусть $\mathcal{A}v = \lambda v$. Тогда $\lambda(v, v) = (v, \lambda v) = (v, \mathcal{A}v) = (\mathcal{A}v, v) = (\lambda v, v) = \bar{\lambda}(v, v)$, откуда $\lambda = \bar{\lambda} \in \mathbb{R}$. Случаи унитарного и косоэрмитова операторов разбираются аналогично. $\square$

16.2. Полярное разложение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16.2. Эрмитов оператор $\mathcal{A}$ называется положительно определенным, если все его собственные значения больше нуля.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 16.3 (об извлечении корня из положительно определенного эрмитова оператора). Пусть $\mathcal{A}$ — положительно определенный эрмитов оператор. Тогда существует единственный положительно определенный эрмитов оператор $\mathcal{B}$, для которого $\mathcal{A} = \mathcal{B}^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование: пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ — различные собственные значения $\mathcal{A}$, $V_1, \dots, V_k$ — соответствующие им собственные подпространства (т.е. $\mathcal{A}|_{V_i} = \lambda_i \mathcal{E}$). Пусть $\mu_i = \sqrt{\lambda_i} > 0$. Определим оператор $\mathcal{B}$, действующий на каждом из V_i умножением на μ_i . Ясно, что $\mathcal{B}^2 = \mathcal{A}$.

Докажем единственность. Пусть $\mathcal{B}$ — искомый оператор. Он диагоналізуем; пусть W_i — его собственные подпространства, отвечающие собственным значениям μ_i . Тогда пространства W_i будут собственными и для оператора $\mathcal{A} = \mathcal{B}^2$, который будет действовать на каждом из W_i умножением на μ_i^2 . Отсюда следует, что набор W_i получается из набора V_i подходящей перенумерацией, т.е. $\mathcal{B}$ определен однозначно. $\square$

ЛЕММА 16.4. Пусть $\mathcal{A}$ — произвольный невырожденный оператор. Тогда оператор $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ — положительно определенный эрмитов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эрмитовость очевидна: $(\mathcal{A}\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}^{**}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}\mathcal{A}^*$. Для доказательства положительной определенности заметим, что если $v \in V$ — собственный вектор $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$, отвечающий собственному значению $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lambda = (v, \lambda v)/(v, v) = (v, \mathcal{A}\mathcal{A}^*v)/(v, v) = (\mathcal{A}^*v, \mathcal{A}^*v)/(v, v) = \|\mathcal{A}^*v\|^2/\|v\|^2 > 0.$$

$\square$

Сформулируем и докажем теорему о полярном разложении оператора, которая является аналогом представления комплексного числа в тригонометрической форме: $z = re^{i\varphi}$, где $r > 0$, $e^{i\varphi} = 1$.

ТЕОРЕМА 16.5 (о полярном разложении). Всякий невырожденный линейный оператор $\mathcal{A}$ можно представить в виде $\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{C}$, где $\mathcal{B}$ — положительно определенный эрмитов оператор, $\mathcal{C}$ — унитарный оператор, причем это представление единственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем единственность: что если такое представление существует, то $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ определены однозначно. Итак, пусть $\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{C}$, где $\mathcal{B} = \mathcal{B}^*$, а $\mathcal{C}\mathcal{C}^* = \mathcal{E}$. Тогда по предыдущей лемме оператор $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{B}\mathcal{C}\mathcal{C}^*\mathcal{B}^* = \mathcal{B}\mathcal{B}^* = \mathcal{B}^2$ — положительно

определенный эрмитов. Значит, из него в силу предложения 16.3 единственным образом извлекается корень, т.е. оператор $\mathcal{B}$ определен однозначно. Но тогда и $\mathcal{C}$ определен однозначно, т.к. $\mathcal{C} = \mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}$.

Докажем существование. Рассмотрим положительно определенный эрмитов оператор $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$. Из него извлекается корень: пусть $\mathcal{B}$ таков, что $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{B}^2$. Тогда положим $\mathcal{C} = \mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}$. Тогда $\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{C}$, а $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{B}\mathcal{C}\mathcal{C}^*\mathcal{B} = \mathcal{B}^2$, откуда $\mathcal{C}\mathcal{C}^* = \mathcal{E}$. Стало быть, $\mathcal{C}$ унитарен. Теорема доказана. $\square$

Аналогичная теорема верна и в евклидовом пространстве: всякий невырожденный оператор однозначно раскладывается в произведение симметрического оператора с вещественными собственными значениями и ортогонального оператора. Доказательство этого факта полностью аналогично эрмитовому случаю.

E-mail address: esmirnov@hse.ru