

## 15. Пятнадцатая лекция, 15 марта 2018 г.

**15.1. Эрмитово пространство.** Ранее мы уже имели дело с евклидовыми пространствами. Если на вещественном векторном пространстве задана положительно определенная симметрическая билинейная форма, то при помощи такой формы можно задать норму на  $V$  по правилу  $\|v\| = (v, v)^{1/2}$  и измерять длины векторов, углы между ними и т.д.

Если же пространство  $V$  комплексное, то, как легко видеть, на  $V$  не бывает положительно определенных билинейных форм. Действительно, пусть задана такая форма, для которой  $(v, v) > 0$  при  $v \neq 0$ . Тогда  $(iv, iv) = i^2(v, v) = -(v, v) < 0$  — противоречие. Поэтому для введения нормы на комплексном векторном пространстве применяются *полуторалинейные* формы.

### 15.2. Полуторалинейные формы.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15.1.** Пусть  $V$  — комплексное векторное пространство. Отображение  $\alpha: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  называется *полуторалинейной формой* на  $V$ , если:

- оно линейно по второму аргументу:  $\alpha(v, w + w') = \alpha(v, w) + \alpha(v, w')$ ;  $\alpha(v, \lambda w) = \lambda \cdot \alpha(v, w)$ ;
- оно *антилинейно* по первому аргументу:  $\alpha(v + v', w) = \alpha(v, w) + \alpha(v', w)$ ;  $\alpha(\lambda v, w) = \bar{\lambda} \cdot \alpha(v, w)$ .

В конечномерном случае полуторалинейную форму можно задать матрицей: пусть  $e_1, \dots, e_n$  — некоторый базис пространства  $V$ . Пусть  $A = (a_{ij})$ , где  $a_{ij} = \alpha(e_i, e_j)$ . Тогда если  $v = \sum x_i e_i$ ,  $w = \sum y_j e_j$ , то

$$\alpha(v, w) = \sum_{i,j} a_{ij} \bar{x}_i y_j.$$

**15.3. Эрмитовы формы.** Наша следующая задача — выяснить, что будет аналогом *симметрической* билинейной формы. Ее определение тоже оказывается нужно «подправить». Так, например, у полуторалинейной формы нельзя просто поменять местами аргументы: по нашему определению форма  $\tilde{\alpha}(v, w) := \alpha(w, v)$  уже не будет полуторалинейной формой, т.к. она будет линейна по *первому* аргументу и антилинейна по *второму*. Чтобы получить полуторалинейную форму, результат надо еще сопрячь.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15.2.** Полуторалинейная форма называется *эрмитовой*, если  $\alpha(v, w) = \overline{\alpha(w, v)}$ .

Отсюда, в частности, следует, что для эрмитовой формы  $\alpha(v, v) = \overline{\alpha(v, v)} \in \mathbb{R}$ . А вещественные числа уже бывают положительными или отрицательными. Поэтому возникает следующее

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15.3.** Эрмитова форма  $\alpha$  называется *положительно определенной*, если  $\alpha(v, v) > 0$  при  $v \neq 0$ . Пространство, снабженное положительно определенной эрмитовой формой, называется *эрмитовым* (или *унитарным*).

**ПРИМЕР 15.4.** На  $\mathbb{C}^n$  существует каноническая положительно определенная эрмитова форма

$$(x, y) = \overline{x_1}y_1 + \cdots + \overline{x_n}y_n.$$

**ПРИМЕР 15.5.** Рассмотрим пространство интегрируемых *комплекснозначных* функций на отрезке  $[0, 1]$  (или каком-нибудь еще множестве). На этом пространстве существует положительно определенная эрмитова форма, определенная по правилу

$$(f, g) = \int_0^1 \overline{f(x)}g(x)dx.$$

**УПРАЖНЕНИЕ 15.6.** Проверьте, что в эрмитовом случае из любого базиса можно сделать ортонормированный при помощи верхнетреугольной замены (ортогонализация Грама–Шмидта).

**15.4. Норма на эрмитовом пространстве.** Пусть  $V$  — эрмитово пространство. Введем на  $V$  норму по правилу  $\|v\| = (v, v)^{1/2} \in \mathbb{R}_+$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 15.7.** Докажите, что это действительно норма (в частности, для нее имеет место неравенство Коши–Буняковского–Шварца).

Как и в евклидовом случае, по норме можно восстановить скалярное произведение. Действительно, из равенств

$$\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\operatorname{Re}(v, w) \text{ и } \|v+iw\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\operatorname{Im}(v, w)$$

можно найти  $(v, w)$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 15.8.** Выпишите явно  $(v, w)$  через нормы векторов  $v$ ,  $w$ ,  $v + w$  и  $v + iw$ .

**15.5. Соответствие между полуторалинейными формами и линейными операторами.** Пусть  $\mathcal{A}$  — линейный оператор на  $V$ . Он задает на  $V$  полуторалинейную форму  $\varphi_{\mathcal{A}}(v, w)$  по правилу:

$$\varphi_{\mathcal{A}}(v, w) := (v, \mathcal{A}w).$$

Заметим, что, хотя форма  $(\cdot, \cdot)$  была эрмитовой, про форму  $\varphi_{\mathcal{A}}$  этого утверждать нельзя: она, вообще говоря, эрмитовой не будет.

Пусть  $\{e_1, \dots, e_n\}$  — *ортонормированный* базис пространства  $V$ . Тогда матрица формы  $\varphi_{\mathcal{A}}$  в этом базисе выглядит так же, как матрица  $A = (a_{ij})$  оператора  $\mathcal{A}$ . Действительно,

$$\varphi_{\mathcal{A}}(e_i, e_j) = (e_i, \mathcal{A}e_j) = (e_i, \sum_k a_{kj}e_k) = a_{ij}.$$

Определим на пространстве полуторалинейных форм инволюцию (т.е. отображение, квадрат которого равен тождественному) по правилу:

$$\varphi(v, w) \mapsto \overline{\varphi(w, v)}.$$

(за счет сопряжения полученная форма снова будет полулинейна по первому аргументу и линейна по второму). Неподвижные точки этой инволюции — это в точности эрмитовы формы.

Поскольку формы можно отождествить с линейными операторами, мы получаем инволюцию на пространстве линейных операторов, называемую *сопряжением*:  $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}^*$ . Согласно вышесказанному, сопряженный к  $\mathcal{A}$  оператор — это оператор  $\mathcal{A}^*$ , удовлетворяющий равенству

$$(\mathcal{A}^*v, w) = (v, \mathcal{A}w) \quad \forall v, w \in V.$$

Матрица  $\mathcal{A}^*$  получается из матрицы  $\mathcal{A}$  композицией транспонирования и комплексного сопряжения:  $A^* = \overline{A}^t$ .

### 15.6. Эрмитовы и косоэрмитовы операторы.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15.9.** Оператор  $\mathcal{A}$  называется *эрмитовым* (соотв. *косоэрмитовым*), если  $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$  (соотв.  $\mathcal{A} = -\mathcal{A}^*$ ).

Эрмитовы и косоэрмитовы операторы иногда еще называют *самосопряженными* и *антисамосопряженными*.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 15.10.** Эрмитовы и косоэрмитовы операторы образуют вещественные векторные пространства (обозначим их  $\text{Herm}(V)$  и  $\text{SkewHerm}(V)$ ). Пространство  $\text{End}(V)$  есть прямая сумма этих двух подпространств (т.е. всякий оператор есть сумма эрмитова и косоэрмитова). Размерности (вещественные!) этих подпространств равны  $n^2$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Во-первых, ясно, что сумма двух (косо)эрмитовых операторов снова (косо)эрмитова, а при умножении на вещественный (но не комплексный!) скаляр (косо)эрмитов оператор снова остается таковым. Далее, если оператор одновременно эрмитов и косоэрмитов, то он нулевой, т.к.  $\mathcal{A} = \mathcal{A}^* = -\mathcal{A}^*$ . Поэтому эрмитовы и косоэрмитовы операторы образуют вещественные подпространства, пересекающиеся лишь по нулю.

Далее, пусть  $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$  — произвольный оператор. Тогда операторы  $\frac{1}{2}(\mathcal{A} + \mathcal{A}^*)$  и  $\frac{1}{2}(\mathcal{A} - \mathcal{A}^*)$  будут эрмитовым и косоэрмитовым соответственно, а их сумма равна  $\mathcal{A}$ . Стало быть,  $\text{End}(V) = \text{Herm}(V) \oplus \text{SkewHerm}(V)$ . Наконец, отображение  $\mathcal{A} \mapsto i\mathcal{A}$  переводит эрмитовы операторы в косоэрмитовы и наоборот, задавая изоморфизм между (вещественными!) векторными пространствами  $\text{Herm}(V)$  и  $\text{SkewHerm}(V)$ . Поэтому размерность каждого из них равна  $\frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} \text{End}(V)$ , т.е.  $n^2$ .  $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 15.11. Про разложение оператора в сумму эрмитова и косоэрмитова можно думать как про обобщение разложения комплексного числа в сумму вещественного и чисто мнимого (а в случае  $\dim V = 1$  это в точности одно и то же).

**15.7. Унитарные операторы.** Понятие унитарного оператора в эрмитовом пространстве является аналогом понятия ортогонального оператора в евклидовом пространстве.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15.12. Оператор  $\mathcal{A}$  называется *унитарным*, если он сохраняет норму вектора:  $\|\mathcal{A}v\| = \|v\|$  для любого  $v \in V$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 15.13. Оператор унитарен тогда и только тогда, когда он сохраняет скалярное произведение:

$$(\mathcal{A}v, \mathcal{A}w) = (v, w) \quad \forall v, w \in V.$$

Действительно, импликация «только тогда» очевидна, а «тогда» следует из того, что скалярное произведение можно восстановить по норме.

Кроме того, унитарные операторы всегда невырождены, т.к. они не имеют ядра (в противном случае мы получили бы, что  $\|\mathcal{A}v\| = 0$  при ненулевом векторе  $v \in \text{Ker } \mathcal{A}$ ). Далее, произведение двух унитарных операторов и обратный к унитарному оператору снова унитарны. Поэтому унитарные операторы образуют группу, которая обозначается через  $U(V)$  и называется *унитарной группой*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 15.14. *Унитарные операторы — это в точности операторы, удовлетворяющие условию  $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^*$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $u, v \in V$  — произвольные векторы. Тогда

$$(u, v) = (\mathcal{A}u, \mathcal{A}v) = (\mathcal{A}^* \mathcal{A}u, v).$$

Поэтому  $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{E}$ , что равносильно тому, что  $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^*$ .  $\square$

Множество матриц, удовлетворяющих условию  $A^{-1} = A^*$ , образует подгруппу в  $GL_n(\mathbb{C})$ , которая обозначается через  $U_n$  и тоже называется унитарной группой.

УПРАЖНЕНИЕ 15.15 (для тех, кто знает, что такое гладкое многообразие). Докажите, что  $U_n$  является *вещественным* гладким многообразием размерности  $n^2$  в  $2n^2$ -мерном пространстве  $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$ .

ПРИМЕР 15.16.  $U_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid z^{-1} = \bar{z}\}$  есть единичная окружность в  $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ .

*E-mail address:* esmirnov@hse.ru