

Полупрямые произведения

Напомним, что группа G раскладывается в *полупрямое произведение* своих подгрупп N и H (обозначение: $G = N \rtimes H$), если $N \triangleleft G$, $N \cdot H = G$ и $N \cap H = \{e\}$.

15.1 (Внешнее полупрямое произведение). Пусть даны две группы N и H и гомоморфизм $\alpha: H \rightarrow \text{Aut } N$. Введите на множестве $N \times H$ (состоящем из пар (n, h)) структуру группы¹ так, чтобы множества $\{(n, e) \mid n \in N\} \cong N$ и $\{(e, h) \mid h \in H\} \cong H$ были бы подгруппами, причем N была бы нормальной, а образ элемента (n, e) при сопряжении элементом (e, h) равнялся бы $(\alpha(h)(n), e)$.

15.2. Опишите все полупрямые произведения групп $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

15.3. Докажите, что всякая группа порядка pq изоморфна полупрямому произведению $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. В каких случаях можно утверждать, что это произведение будет прямым?

15.4. Пусть G — группа порядка $p^m q^n$, и пусть силовская p -подгруппа N нормальна. Докажите, что найдется такая подгруппа H , что $G = N \rtimes H$.

15.5. Пусть $N \triangleleft G$ — нормальная подгруппа. Всегда ли найдется такая подгруппа $H \subset G$, что $G \cong N \rtimes H$?

15.6. Для следующих пар (G, N) найдите (если она существует) такую подгруппу $H \subset G$, что $G \cong N \rtimes H$:

- а) (S_n, A_n) ; б) (A_4, V_4) ; в) $(D_n, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$; г) группа движений $\mathbb{R}^n$, группа параллельных переносов.

15.7. Можно ли разложить следующие группы в полупрямые произведения своих (нетривиальных) подгрупп:

- а) A_n , $n \geq 5$; б) $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$, $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$;
в) $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, где $a \in \mathbb{K}^*$, $b \in \mathbb{K}$?

15.8. Опишите все группы порядка а) 10; б) 21; в) 33.

15.9*. Докажите, что всякая группа порядка 90 разрешима.

¹То есть определите операции умножения и взятия обратного.