

Группы

12.1. Будут ли нормальными следующие подгруппы? Если да, опишите соответствующие факторгруппы.

а) $A_n \subset S_n$; **б)** $V_4 \subset S_4$; **в)** $V_4 \subset A_4$; **г)** $SL(n) \subset GL(n)$;

д) невырожденные верхнетреугольные матрицы в $GL(n)$;

е) матрицы вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где a, d нечетны, а b, c четны, в $GL(n, \mathbb{Z})$?

12.2. Пусть G — группа, H — нормальная подгруппа в G , а K — нормальная подгруппа в H . Верно ли, что K нормальна в G ?

12.3. а) Докажите, что любая подгруппа индекса 2 нормальна.

б*) Докажите, что подгруппа конечной группы, индекс которой является наименьшим простым делителем конечной группы, нормальна.

12.4. а) Докажите, что в группе Q_8 любая подгруппа является нормальной.

б) Найдите центр и классы сопряженности в каждом из классов.

12.5. Найдите центр группы: **а)** S_n ; **б)** A_n ; **в)** D_n .

12.6. Пусть группа G порождена элементами a и b , причем $a^2 = b^2 = (ab)^4 = 1$. Докажите, что $(ab)^2 \in Z(G)$.

12.7. Докажите, что $S_4/V_4 \cong S_3$.

12.8. Пусть G — группа порядка p^n . Докажите, что центр G содержит больше одного элемента.

12.9. Пусть G — некоммутативная группа. Может ли быть циклической группа

а) $\text{Int } G = G/Z(G)$;

б) $\text{Aut } G$?

12.10. Докажите, что всякая группа порядка p^2 коммутативна.