

Результант и дискриминант

Напомним, что *результант* многочленов

$$f(x) = a_n(x - t_1) \dots (x - t_n) \text{ и } g(x) = b_m(x - u_1) \dots (x - u_m)$$

равняется

$$\text{Res}(f, g) = a_n^m b_m^n \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (t_i - u_j) = a_n^m \prod_{i=1}^n g(t_i) = (-1)^{mn} b_m^n \prod_{j=1}^m f(u_j).$$

Он обращается в нуль тогда и только тогда, когда у многочленов $f(x)$ и $g(x)$ есть общий корень.

Дискриминант многочлена $f(x) = a_n(x - t_1) \dots (x - t_n)$ равен

$$D(f) = a_n^{2n-2} \prod_{i < j} (t_i - t_j)^2 = \left[a_n^{n-1} \prod_{i < j} (t_i - t_j) \right]^2 = \pm a_n^{-1} \text{Res}(f, f').$$

Его обращение в нуль равносильно наличию у $f(x)$ кратного корня.

11.1. Докажите, что $\text{Res}(f, gh) = \text{Res}(f, g) \text{Res}(f, h)$.

11.2. Вычислите результат многочленов:

а) $x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ и $2x^2 - x - 1$; **б)** $3x^3 + 2x^2 + x + 1$ и $2x^3 + x^2 - x - 1$.

11.3. Найдите все значения λ , при которых имеют общий корень многочлены:

а) $x^3 - \lambda x + 2$ и $x^3 + \lambda x + 2$; **б)** $x^3 - 2\lambda x + \lambda^3 x$ и $x^2 + \lambda^2 - 2$.

11.4. а) Докажите, что $D[(x - a)f(x)] = D[f(x)] \cdot f(a)^2$. **б)** Пусть f и g — неприводимые многочлены. Докажите, что $D(fg) = D(f)D(g)[\text{Res}(f, g)]^2$.

11.5. Вычислите дискриминант многочленов:

а) $ax^2 + bx + c$; **б)** $x^3 + px + q$; **в)** $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$;
г) $x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1$; **д)** $x^n + a$; **е)** $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$

11.6. Найдите все значения λ , при которых имеют кратный корень многочлены:

а) $x^3 - 3x + \lambda$; **б)** $x^4 - 4x + \lambda$; **в)** $x^4 - 4x^3 + (2 - \lambda)x^2 + 2x - 2$.

11.7. Исключите x из системы уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3; \\ x^2y + xy^2 = 6. \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x^3 - xy - y^3 + y = 0; \\ x^2 + x - y^2 = 1. \end{cases}$

11.8*. Вычислите дискриминант:

а) многочленов Эрмита $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2/2})$;
б) многочленов Лагерра $L_n(x) = (-1)^n e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$;
в) многочленов Чебышёва $P_n(x) = 2 \cos(n \arccos(x/2))$.