

Квадратичные и билинейные формы

- 8.1. Найдите поляризацию и сигнатуру квадратичной формы **а)** $x_1^2 - x_2^2$ и **б)** x_1x_2 на $\mathbb{R}^2$, $\sum_{i < j} x_i x_j$ на **в)** $\mathbb{R}^3$ и **г)** $\mathbb{R}^n$, **д)** $\sum_{i < j} (j - i)x_i x_j$ на $\mathbb{R}^n$, **е)** $Q(A) = \det A$ на $\text{Mat}_2(\mathbb{R})$, **ж)** $Q(A) = \text{tr} A^2$ на $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$.
- 8.2. Найдите линейные замены, приводящие к диагональному виду квадратичные формы из прошлой задачи.
- 8.3. Может ли невырожденная квадратичная форма на двумерном вещественном пространстве иметь: **а)** ровно одно, **б)** ровно два, **в)** ровно три (ненулевых) изотропных подпространства? **г)** Тот же вопрос, если форма не предполагается невырожденной.
- 8.4. Приведите пример невырожденной квадратичной формы на четырехмерном вещественном пространстве V , имеющей **а)** только одномерные изотропные подпространства, **б)** двумерные изотропные подпространства. **в)** Какая может быть в каждом из этих случаев сигнатура формы?
- 8.5. Существует ли на $\mathbb{R}^7$ квадратичная форма с главными угловыми минорами
а) $M_1 < 0, M_2 = 0, M_3 > 0, M_4 < 0, M_5 = 0, M_6 < 0, M_7 > 0$?
б) $M_1 < 0, M_2 = 0, M_3 > 0, M_4 < 0, M_5 = 0, M_6 > 0, M_7 > 0$?
в) $M_1 < 0, M_2 = 0, M_3 > 0, M_4 < 0, M_5 = 0, M_6 = 0, M_7 > 0$?
Если да, то какая у нее может быть сигнатура?
- 8.6. **а)** Для положительно определенной квадратичной формы Q докажите неравенство треугольника $\sqrt{Q(x+y)} \leq \sqrt{Q(x)} + \sqrt{Q(y)}$. Когда достигается равенство?
б) Для невырожденной формы Q с отрицательным индексом инерции 1 докажите обратное неравенство треугольника $\sqrt{Q(x+y)} \geq \sqrt{Q(x)} + \sqrt{Q(y)}$. Когда достигается равенство?