Гомоморфизмы абелевых групп

7.1. На множестве гомоморфизмов абелевой группы A в абелеву группу B определим операцию сложения по правилу

$$(\alpha + \beta)(x) = \alpha(x) + \beta(x).$$

Докажите, что гомоморфизмы $A \to B$ образуют абелеву группу $\mathrm{Hom}(A, B)$.

7.2. Вычислите группы гомоморфизмов:
а) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_8)$; **б)** $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_{12}, \mathbb{Z}_6)$; **в)** $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_{12}, \mathbb{Z}_{18})$; **г)** $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_{12})$;
д) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n)$; **е)** $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z})$; **ж)** $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$; **з)** $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, A)$.

7.3. Докажите, что *эндоморфизмы* (т.е. гомоморфизмы в себя) абелевой группы A образуют кольцо с единицей. Оно обозначается $\mathrm{End}\, A$.

7.4. Найдите кольца эндоморфизмов групп
а) $\mathbb{Z}$; **б)** $\mathbb{Z}_n$; **в)** $\mathbb{Q}$.

7.5. Докажите, что кольцо эндоморфизмов свободной абелевой группы ранга n изоморфно кольцу целочисленных матриц порядка n.

7.6. Докажите, что в абелевой группе отображение $x \mapsto nx$ ($n \in \mathbb{Z}$) является эндоморфизмом. Для каких групп оно будет: **а)** инъективно; **б)** сюръективно?

Обратимый эндоморфизм группы называется *автоморфизмом*. Автоморфизмы группы A образуют группу, обозначаемую $\mathrm{Aut}\, A$.

7.7. Найдите группы автоморфизмов групп:
а) $\mathbb{Z}$; **б)** $\mathbb{Q}$; **в)** $\mathbb{Z}_{2^n}$; **г)** $\mathbb{Z}^n$.